GEOMETRIA BARICENTRELOR

Studiu de specialitate

Profesor DĂLINESC DORIS
Şcoala Gimnazială Voiteg
Jud. Timiş

Fie A şi B două puncte diferite din planul euclidian π (sau din spaţiul euclidian). Să indicăm o modalitate de construcţie a mijlocului segmentului (AB). Fie $O \in \pi$ un punct oarecare $(O \notin AB)$.

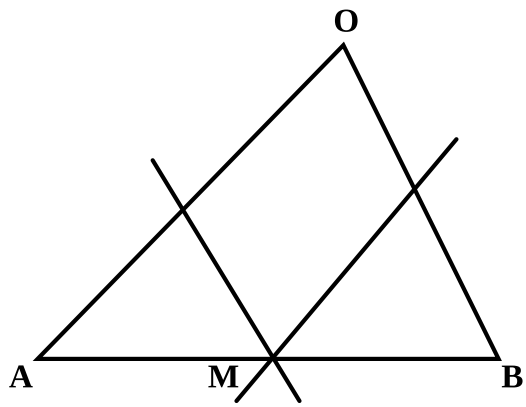


Figura 1

(linie mijlocie)

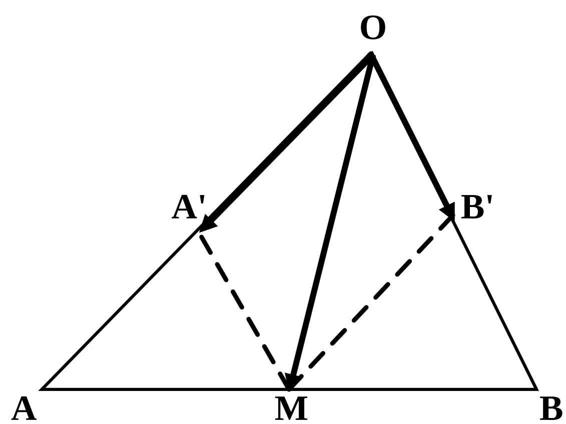


Figura 2

Sau vectorial

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Această construcţie a mijlocului M al segmentului (AB) nu depinde de alegerea punctului O *(Figura 3)*.

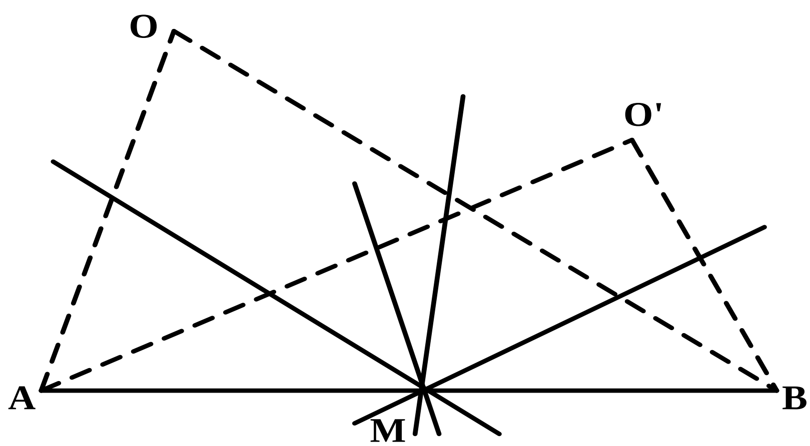


Figura 3

În consecință vom scrie

(1) $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ și vom spune că M este centrul de greutate (baricentrul) al sistemului de puncte $\{A, B\}$ cu ponderile $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Observația 1: În felul acesta pot fi scrise și celelalte puncte ale segmentului (AB).

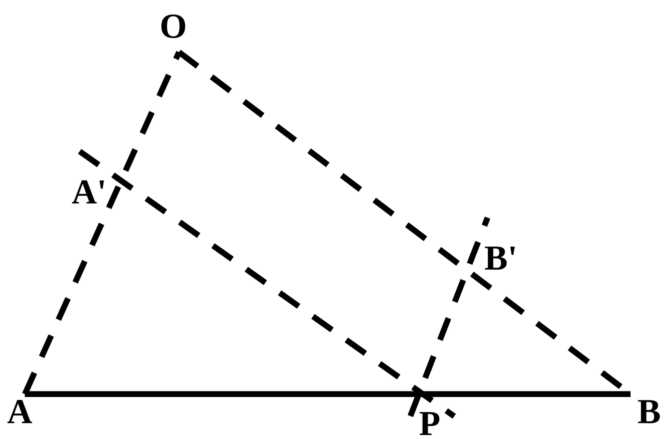


Figura 4

Fie $P \in (AB)$. Considerăm $A' \in (OA)$ și $B' \in (OB)$ astfel încât $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$, $0 < \lambda < 1$, $\overrightarrow{OB'} = \mu\overrightarrow{OB}$, $0 < \mu < 1$ și $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OP}$. Din teorema lui Thales obținem că:

(2) $\lambda = \frac{PB}{AB}$ și $\mu = \frac{PA}{AB}$, unde $\lambda + \mu = 1$.

Facem aceeași observație, că punctul P nu depinde de alegerea punctului O. În acest caz, scriem: $P = \lambda A + \mu B$ și spunem că P este centrul de greutate (baricentrul) sistemului de puncte $\{A, B\}$ cu ponderile $\{\lambda, \mu\}$.

Acceptând $A = 1 \cdot A + 0 \cdot B$ și $B = 0 \cdot A + 1 \cdot B$, segmentul închis $[A, B]$ se poate scrie astfel:

(3) $[A, B] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in [0,1]\}$.

Din relația (17) obținem că:

(4) $\frac{AP}{PB} = \frac{\mu}{\lambda}, P \neq B$.

Dacă în proporția (19) notăm $\frac{AP}{PB}=k$, atunci $\frac{\mu}{\lambda}=k$.

Calculăm valorile lui λ și μ în funcție de k :

$$\lambda=\frac{PB}{AB}=\frac{PB}{AP+PB}=\frac{1}{\frac{AP+PB}{PB}}=\frac{1}{\frac{AP}{PB}+1}=\frac{1}{1+k}$$

$$\mu=\frac{PA}{AB}=\frac{PA}{PA+PB}=\frac{1}{\frac{PA+PB}{PA}}=\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=\frac{k}{1+k}.$$

Pentru P găsim astfel expresia: $P=\frac{1}{1+k}A+\frac{k}{1+k}B$.

<u>Observația 2</u>: Considerăm $A'\in(OA), B'\in(OB)$ astfel încât $\overrightarrow{OA'}=\alpha\overrightarrow{OA}$, $0<\alpha<1$, $\overrightarrow{OB'}=\beta\overrightarrow{OB}$, $0<\beta<1$ cu $\alpha+\beta\neq 1$ și $\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB'}$.

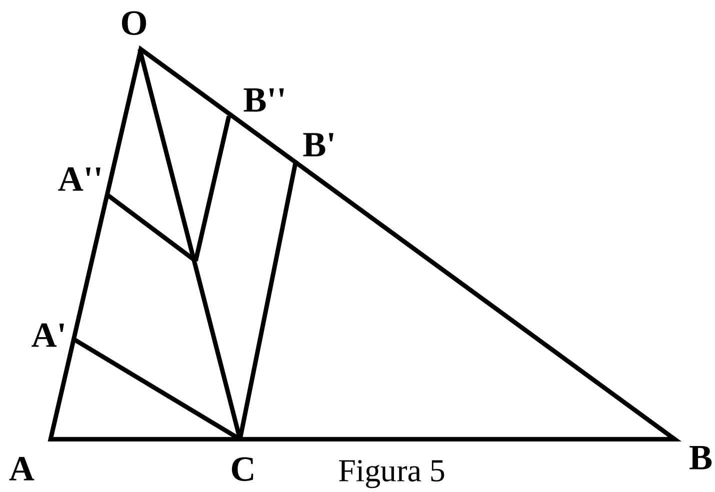


Figura 5

Fie $\{C\}=[OC'\cap AB$. Atunci: $C=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A+\frac{\beta}{\alpha+\beta}B$ și $\overrightarrow{OC'}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OC}$. În adevăr, fie $A''\in(OA)$ și $B''\in(OB)$ astfel încât $\overrightarrow{OA''}+\overrightarrow{OB''}=\overrightarrow{OC}$. În baza celor stabilite în *Observația 1*, rezultă că

(5) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA''}+\overrightarrow{OB''}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$, unde $\lambda=\frac{CB}{AB},\mu=\frac{CA}{AB}$.

Pe de altă parte, egalitățile $\frac{OA'}{OA''}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OB'}{OB''}$ implică $\lambda=\frac{OA''}{OA}=\frac{\alpha OC}{OC''}$, $\mu=\frac{OB''}{OB}=\frac{\beta OC}{OC''}$, de unde rezultă că $1=\lambda+\mu=\frac{(\alpha+\beta)OC}{OC'}$, adică $\frac{OC}{OC'}=\frac{1}{\alpha+\beta}$. Prin urmare, $\overrightarrow{OA''}=\frac{\alpha OC}{OC'}$,

$\overrightarrow{OA} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB''} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$, astfel încâtdin relaţia (20) deducem că:

$\overrightarrow{OC} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$. Cum C nu depinde de alegerea punctului O avem:

$C = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$.

Pe de altă parte, deoarece $\frac{OC'}{OC} = \alpha + \beta$, rezultă că $\overrightarrow{OC'} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OC}$.

Deci, orice punct de pe dreapta AB se poate scrie astfel.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Brânzei, S. Anita, C. Cocea, PLANUL ŞI SPAŢIUL EUCLIDIAN, Editura Academiei Române, 1986
2. M. Craioveanu, GEOMETRIA BARICENTRELOR ŞI APLICAŢII, Conferinţă prezentată unui grup de elevi din Germania, Timişoara, iunie 1994

SPAŢII AFINE REALE

Profesor DĂLINESC DORIS
Şcoala Gimnazială Voiteg
Jud. Timiş

DEFINIŢII ŞI CONSECINŢE IMEDIATE

Definiţia 1: Fie **A** o mulţime nevidă şi V un spaţiu vectorial real. O structură afină pe **A** este determinată de o aplicaţie $\varphi : \mathbf{A}\times\mathbf{A} \to V$ ce satisface condiţiile:

a) Oricare ar fi punctele A, B, C ale mulţimii **A:** $\varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$

b) Există un punct $O \in \mathbf{A}$ astfel încât aplicaţia $\varphi_O : \mathbf{A} \to V$, $\varphi_O(M) = \varphi(O,M)$ să fie bijectivă.

Un spaţiu afin real este deci un triplet $(\mathbf{A}, V, \varphi)$ supus condiţiilor *a)* şi *b)* din *Definiţia 1*.
Mulţimea **A** se numeşte mulţimea suport a spaţiului afin, iar elementele sale se numesc punctele spaţiului afin.
Spaţiul vectorial V se numeşte spaţiul director al spaţiului afin, iar elementele sale se numesc vectorii liberi ai spaţiului afin.
Funcţia φ se numeşte funcţia de structură afină. Prin dimensiunea lui **A** se înţelege dimensiunea spaţiului vectorial director V.

Definiţia 2: Un element $(A,B) \in \mathbf{A}\times\mathbf{A}$ se numeşte bipunct al spaţiului afin **A**. Punctul A se numeşte originea bipunctului, iar punctul B se numeşte extremitatea bipunctului. Un bipunct de forma $(A,A) \in \mathbf{A}\times\mathbf{A}$ se numeşte bipunct diagonal.

Definiţia 3: Bipunctele (A,B) şi (B,A) se numesc bipuncte simetrice.

Consecinţe:

1) Vectorul corespunzător oricărui bipunct diagonal este nul, adică $\varphi(A,A) = \vec{0}, \forall A \in \mathbf{A}$

2) Vectorii corespunzători unei perechi de bipuncte simetrice sunt vectori opuşi, adică

$\varphi(A,B) = -\varphi(B,A), \forall A,B \in \mathbf{A}$

3) Aplicaţia φ este o surjecţie şi pentru fiecare punct $O \in$ **A,** aplicaţia:

(6) $\varphi_O : A \to V$, $\varphi_O(A) = \varphi(O,A)$, $\forall A \in$ **A,** este o bijecţie.

Observaţia 1: Referitor la funcţia de structură afină φ se obişnuieşte notaţia:

$\varphi(A,B) = \overrightarrow{AB}, \forall A,B \in \mathbf{A}$

În acest caz, condiţia *a)* de la *Definiţia I.2.1* se scrie:

$\forall A,B,C \in$ **A**, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Analog, relaţia (9) devine: $\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$.

Într-un spaţiu afin real (**A** , V , φ), funcţia de structură φ determină o relaţie de echivalenţă pe mulţimea bipunctelor lui **A** pe care o vom numi relaţie de echipolenţă, în felul următor:

Definiţia 4: Vom spune că bipunctul (A,B) este echipolent cu bipunctul (C,D) dacă au aceeaşi imagine prin φ, adică $(A,B) \simeq (C,D) \Leftrightarrow \varphi(A,B) = \varphi(C,D)$

Cu alte cuvinte: $(A,B) \simeq (C,D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Observaţia 2: Se verifică uşor că relaţia φ astfel definită este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci este o relaţie de echivalenţă pe **A** $\times$ **A.**

Observaţia 3: Mulţimea factor **A** $\times$ **A** $/\simeq$ determinată de această relaţie este în bijecţie cu spaţiul director V. În particular, la fiecare vector $\vec{v}$ corespunde o unică clasă de bipuncte echipolente.

În cazul când mulţimea factor **A** $\times$ **A** $/\simeq$ se identifică cu spaţiul vectorial V prin această bijecţie, clasa bipunctului (A,B) notată $\overrightarrow{AB}$, poartă numele de vector liber al spaţiului afin **A** definit de perechea ordonată (A,B).

Exemplul 1: Spaţiul obişnuit al geometriei elementare notat S posedă o structură afină canonică. În adevăr, axioma riglei arată că există o bijecţie $f : S \to \mathbb{R}^3$ astfel încât:

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y^i - x^i)^2}$$

unde $f(P) = (x^1, x^2, x^3)$, $f(Q) = (y^1, y^2, y^3)$.

Definim relaţia binară ~ pe mulţimea $S \times S$ în felul următor:

$(A,B) \sim (C,D)$ dacă şi numai dacă $f(B) - f(A) = f(C) - f(D)$.

Se poate arăta că „~" este o relaţie de echivalenţă într-unsistem de coordonate f. Fie L mulţimea tuturor acestor clase de echivalenţă.

Clasa bipunctului (A,B) se notează cu $\overrightarrow{AB}$ şi se numeşte vectorul liber definit de perechea ordonată (A,B).

Orice sistem de coordonate f defineşte bijecţia $\chi_f : L \to \mathbb{R}^3$, $\chi_f(\overrightarrow{AB}) = f(B) - f(A)$, care include pe L o structură unică de spaţiu liniar 3-dimensional astfel încât χ_f să fie un izomorfism liniar. Mai mult, se poate arăta că această structură liniară pe L este independentă de alegerea lui f.

Dacă definim $\varphi : S \times S \to L, (A, B) \to \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$, atunci (S, L, φ) este un spaţiu afin 3-dimensional.

BIBLIOGRAFIE

3. M. Craioveanu, GEOMETRIA BARICENTRELOR ŞI APLICAŢII, Conferinţă prezentată unui grup de elevi din Germania, Timişoara, iunie 1994

4. L. Nicolescu, V. Boskoff, PROBLEME PRACTICE DE GEOMETRIE, Editura tehnică, Bucureşti, 1990

5. V. Obădeanu, CAIETE METODICO-ŞTIINŢIFICE – MATEMATICĂ – PROBLEME DE LOCURI GEOMETRICE, Universitatea din Timişoara, 1983

DEPENDENŢA ŞI INDEPENDENŢA LINIARĂ A VECTORILOR

Studiu de specialitate

Profesor DĂLINESC DORIS
Şcoala Gimnazială Voiteg
Jud. Timiş

Definiţia 1: Fie $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\}$ un sistem finit de vectori din spaţiul vectorial real V. Vom spune că un vector $\vec{v} \in V$ este o combinaţie liniară a sistemului S, sau o combinaţie liniară de vectorii sistemului S, dacă există un sistem de scalari $\{\lambda^1, ..., \lambda^p\} \subset \mathbb{R}$, astfel încât:

(1) $\vec{v} = \lambda^1\vec{v}_1 + \lambda^2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda^p\vec{v}_p$, unde scalarii $\lambda^1, ..., \lambda^p$ se numesc coeficienţii combinaţiei liniare.

Definiţia 2: Vom spune că sistemul de vectori $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\}$ este liniar independent, sau că vectorii lui S sunt liniar independenţi, dacă

(2) $\vec{0} = \lambda^1\vec{v}_1 + \lambda^2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda^p\vec{v}_p \Rightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^p = 0$.

În caz contrar, vom spune că S este liniar independent, sau că vectorii lui S sunt liniari independenţi.

Propoziţia 1: O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul de vectori $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\} \subset V$ să fie liniar independent este ca cel puţin unul din vectorii lui S să fie combinaţie liniară de ceilalţi.

Demonstraţie:

Presupunem că sistemul de vectori S este liniar dependent. Atunci există cel puţin un scalar $\lambda^i \neq 0, (i \in \{1, ..., p\})$ astfel încât $\vec{0} = \lambda^1\vec{v}_1 + \lambda^2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda^p\vec{v}_p$.

Dacă presupunem că $\lambda^p \neq 0$, obţinem:

(3) $\vec{v}_p = -\frac{\lambda^1}{\lambda^p}\vec{v}_1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^p}\vec{v}_2 - \ldots - \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda^p}\vec{v}_{p-1}$.

Dacă notăm: $\alpha^1 = -\frac{\lambda^1}{\lambda^p}$, $\alpha^2 = -\frac{\lambda^2}{\lambda^p}, ..., \alpha^{p-1} = -\frac{\lambda^{p-1}}{\lambda^p}$, obţinem

(4) $\vec{v}_p = \alpha^1\vec{v}_1 + \alpha^2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha^{p-1}\vec{v}_{p-1}$

şi deci $\vec{v}_p$ este combinaţie liniară de ceilalţi vectori din sistemul S.

Reciproc, dacă are loc relaţia (6), atunci avem:

$$(5)\quad \vec{0} = \alpha^1\vec{v}_1 + \alpha^2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha^{p-1}\vec{v}_{p-1} + (-1)\vec{v}_p .$$

Cum $\lambda^p = -1 \neq 0$, rezultă că S este un sistem liniar dependent. Q.E.D.

Observaţia 1: Orice sistem S care conţine vectorul nul este liniar dependent.

Observaţia 2: Dacă un subsistem al lui S este liniar dependent, atunci şi S este liniar dependent.

Observaţia 3: Orice subsistem al unu sistem liniar independent este liniar independent.

BAZA UNUI SPAŢIU VECTORIAL REAL

Definiţia 3: Un sistem de vectori $S = \{\vec{v}_1,..., \vec{v}_p\} \subset V$ se numeşte sistem de generatori pentru spaţiul vectorial V, dacă orice vector $\vec{v} \in V$ este o combinaţie liniară a lui S.

Definiţia 4: Se numeşte bază a unui spaţiu vectorial real V, un sistem finit de vectori $B \subset V$ care satisface condiţiile:

a) B este un sistem de generatori pentru V;

b) B este liniar independent.

Propoziţia 2: O condiţie necesară şi suficientă ca un sistem finit $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_n\}$ de vectori din V, să fie o bază pentru V, este ca orice vector $\vec{v} \in V$ să fie o combinaţie liniară unică de vectorii lui B.

Demonstraţie: Presupunem că $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_n\}$ este o bază pentru V. Atunci avem: $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + ... + x^n\vec{e}_n$. Dacă avem şi: $\vec{v} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + ... + y^n\vec{e}_n$ prin scădere obţinem: $\vec{0} = (y^1 - x^1)\vec{e}_1 + (y^2 - x^2)\vec{e}_2 + \ldots + (y^n - x^n)\vec{e}_n$.

Sistemul B fiind liniar independent, rezultă $y^1 = x^1, y^2 = x$,..., $y^n = x^n$.

Reciproc, să presupunem că fiecare vector $\vec{v} \in V$ este o combinaţie liniară unică de vectorii lui B. Vectorul nul se poate scrie sub forma:

$\vec{0} = \lambda^1\vec{e}_1 + \lambda^2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda^n\vec{e}_n$, cu $\lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^n = 0$

Combinaţia fiind unică, are loc implicaţia (5) şi deci B este liniar independent. În consecinţă B este bază pentru V. Q.E.D.

Definiţia 5: Dacă $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2,..., \vec{v}_p\}$ este o bază a spaţiului vectorial V, atunci orice vector $\vec{v} \in V$ admite o scriere unică de forma: $\vec{v} = \lambda^1\vec{v}_1 + \lambda^2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda^p\vec{v}_p$.

Sistemul ordonat de scalari $(\lambda^1, \lambda^2,..., \lambda^p)$ poartă numele de coordonatele vectorului $\vec{v}$ în baza ordonată $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2,..., \vec{v}_p)$.

Exemplul 1: În spaţiul $\mathbb{R}^n$ sistemul de vectori $\vec{e}_1 = (1,0,...,0)$, $\vec{e}_1 = (0,1,...,0)$,...., $\vec{e}_n = (0,0,...,1)$ este o bază numită naturală sau bază canonică.

Observaţia 4: Dacă $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,..., \vec{e}_n\}$ este o bază pentru spaţiul vectorial real V, atunci se poate demonstra că orice altă bază a sa are tot *n* vectori.

Definiţia 6: Numărul *n*, comun tuturor bazelor unui spaţiu vectorial real V, cu bază finită, se numeşte dimensiune a spaţiului V.

Observaţia 5: Spaţiile vectoriale de dimensiune 1 se numesc drepte vectoriale, iar cele de dimensiune 2 se numesc plane vectoriale.

BIBLIOGRAFIE

6. D. Brânzei, S. Anita, E. Onofraş, Gh. Isvoranu, BAZELE RAŢIONAMENTULUI GEOMETRIC, Editura Academiei Române, 1983
7. M. Craioveanu, GEOMETRIA BARICENTRELOR ŞI APLICAŢII, Conferinţă prezentată unui grup de elevi din Germania, Timişoara, iunie 1994
8. M. Craioveanu, I. D. Albu, GEOMETRIE AFINĂ ŞI EUCLIDIANĂ, Editura Flaca, Timişoara, 1982
9. V. Obădeanu, CAIETE METODICO-ŞTIINŢIFICE – MATEMATICĂ – PROBLEME DE LOCURI GEOMETRICE, Universitatea din Timişoara, 1983

SPAŢII VECTORIALE REALE

Studiu de specialitate

Profesor DĂLINESC DORIS
Şcoala Gimnazială Voiteg
Jud. Timiş

Definiţia 1: O structură de spaţiu vectorial real pe o mulţime nevidă $V = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},..., \vec{u}, \vec{v}, \vec{w},..., \vec{x}, \vec{y},...\}$ peste câmpul ℝ (al numerelor reale) este determinată de două operaţii:

a) O operaţie internă pe V , notată aditiv

(6) $\forall(\vec{v}, \vec{w}) \in V \times V \to \vec{v} + \vec{w} \in V$, care determină pe V o structură de grup abelian;

b) O operaţie externă pe V peste câmpul ℝ, notată multiplicativ

(7) $\forall(\alpha, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times V \to \alpha\vec{v} \in V$, astfel încât $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\vec{v}, \vec{w} \in V$:

(8) (b_1) $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

(b_2) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

(b_3) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha + \beta)\vec{v}$

(b_4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, unde 1 este elementul unitate din ℝ în raport cu înmulţirea numerelor reale.

Definiţia 2: Mulţimea V dotată cu o structură de spaţiu vectorial peste câmpul ℝ se numeşte spaţiu vectorial (sau liniar) real.

Observaţia 1: Elementele mulţimii nevide V se numesc vectori, iar elementele câmpului ℝ se numesc scalari.

Observaţia 2: Operaţia internă *a)* se numeşte operaţie de adunare a vectorilor, iar operaţia externă *b)* se numeşte operaţie de înmulţire a vectorilor cu scalari.

CONSECINŢE IMEDIATE

Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi orice $\vec{v} \in V$, avem: $0\vec{v} = \vec{0}$, $\alpha\vec{0} = \vec{0}$, $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, unde $\vec{0} \in V$ este elementul neutru la adunarea din V , numit şi vectorul nul, -1 este opusul unităţii din ℝ, iar $-\vec{v}$ este opusul lui $\vec{v} \in V$.

Exemplul 1: Spaţiul liniar ε_3^0

Notăm cu ε_3 mulţimea punctelor spaţiului euclidian şi cu ε_3^0 mulţimea segmentelor orientate din ε_3 cu originea într-un punct fix $O \in \varepsilon_3$, adică:

$$\varepsilon_3^0 = \{O\} \times \varepsilon_3 = \{(O, A) | A \in \varepsilon_3\}.$$

Pe mulţimea ε_3^0 determinăm o structură de spaţiu vectorial real considerând următoarele operaţii:

a) Operaţia internă de adunare a segmentelor orientate, definită prin relaţia: $(O, A) + (O, B) = (O, S)$, unde S este simetricul punctului O faţă de mijlocul segmentului $[AB]$.

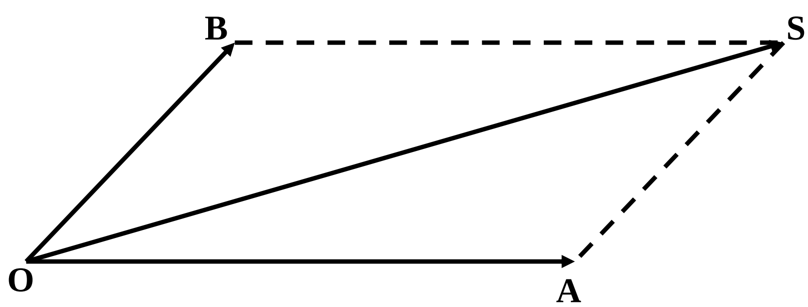


Figura I.1.1

În *Figura 1*, segmentele orientate (O, A) şi (O, B) nu se află pe aceeaşi dreaptă, iar suma lor efectuează cu regula paralelogramului.

Segmentul orientat (O, O) are lungimea zero, direcţia şi sensul nedeterminate şi are rol de element neutru la adunarea segmentelor orientate.

Fiecărui segment orientat $(O, O) \in \varepsilon_3^0, O \neq A$, îi corespunde un segment orientat unic $(O, A^{'}) \in \varepsilon_3^0$ (situat pe aceeaşi dreaptă cu *O* şi *A*), de sens opus şi având aceeaşi lungime cu $[OA]$. Vom nota $(O, A^{'}) = -(O, A)$ şi vom numi acest segment orientat opusul lui (O, A) sau simetricul lui (O, A).

b) Operaţia externă de înmulţire a segmentelor orientate cu numere reale prin relaţia:

$$(\alpha, (O, A)) \in \mathbb{R} \times \varepsilon_3^0 \rightarrow (O, A^{'}) = \alpha(O, A) \in \varepsilon_3^0,$$

unde segmentul orientat $(O, A^{'})$ este coliniar cu (O, A) şi are acelaşi sens cu (O, A) dacă $\alpha > 0$ şi sens opus cu (O, A) dacă $\alpha < 0$. Lungimea $OA^{'}$ a lui $(O, A^{'})$ este dată de relaţia: $OA^{'} = |\alpha| \cdot OA$.

<u>Observaţia 3</u>: Verificarea condiţiilor *(b1) – (b4)* din *Definiţia I.1.1* este imediată.

Exemplul 2: Pe produsul cartezian $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R} = \{(x^1,\ldots,x^n) \mid x^1,\ldots,x^n \in \mathbb{R}\}$ se poate defini o structură de spaţiu vectorial (liniar) real, numită structura canonică de spaţiu vectorial (liniar) real a lui $\mathbb{R}^n$.

Astfel dacă $\vec{x} = (x^1,\ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\vec{y} = (y^1,\ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, atunci definim suma lor astfel: $\vec{x}+\vec{y} = (x^1+y^1,\ldots, x^n+y^n)$.

Elementul neutru de la adunare este $\vec{0} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$, iar opusul elementului $x^n = (x^1,\ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ este $-x^n = (-x^1,\ldots,-x^n) \in \mathbb{R}^n$.

Operaţia externă pe $\mathbb{R}^n$ faţă de $\mathbb{R}$ se defineşte prin:

$$(\alpha,\vec{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \alpha\vec{x} = (\alpha x^1,\ldots, \alpha x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Relaţiile *(b$_1$) – (b$_4$)* din *Definiţia I.1.1* se verifică imediat.

BIBLIOGRAFIE

10. I. D. Albu, GEOMETRIE – CONCEPTE ŞI METODE DE STUDIU, PARTEA I. CONSTRUCŢIA AXIOMATICĂ A GEOMETRIEI EUCLIDIENE, Editura Mirton, Timişoara, 1998
11. V. Obădeanu, CAIETE METODICO-ŞTIINŢIFICE – MATEMATICĂ – PROBLEME DE LOCURI GEOMETRICE, Universitatea din Timişoara, 1983

O PROBLEMĂ DE COLINIARITATE DIN GEOMETRIA PLANĂ TRATATĂ CU METODA COORDONATELOR

Profesor DĂLINESC DORIS
Şcoala Gimnazială Voiteg
Jud. Timiş

1. Fie punctele $A(8;0)$, $B(3;6)$, $C(0;3)$ într-un plan raportat la un reper cartezian. Dreapta BC intersectează axa Ox în punctul D şi dreapta AB intersectează axa Oy în punctul E. Atunci mijloacele segmentelor $[OB]$, $[AC]$ şi $[DE]$ sunt coliniare.

În adevăr, scriem ecuaţia dreptei AB şi astfel:

$$(x-8)(6-0) = (y-0)(3-8) \quad\Rightarrow\quad 6x+5y-48=0.$$

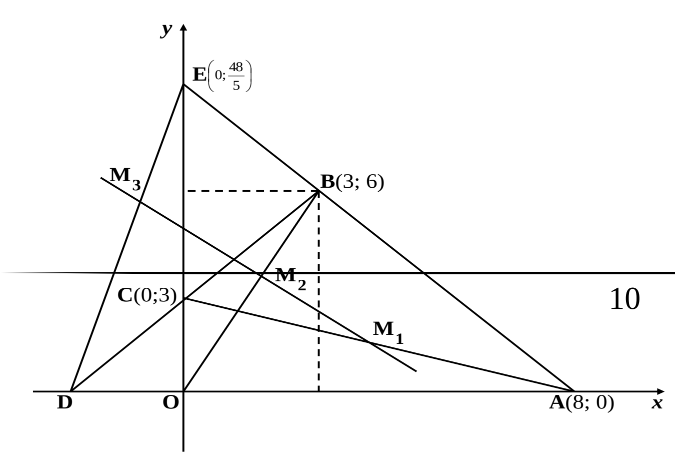


Fig. 1.

Fie $\{E\} = AB \cap Oy$ *(Figura 1.)* şi determinăm coordonatele punctului E rezolvând sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 6x+5y-48=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow E\left(0;\frac{48}{5}\right).$$

Determinăm ecuaţia dreptei BC:

(1) $$(x-3)(3-6)=(y-6)(0-3) \Rightarrow \quad x-y+3=0.$$

Fie $\{D\} = BC \cap Ox$ şi determinăm coordonatele punctului D rezolvând sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la $D(-3;0)$.

Notăm cu M_1, M_2, M_3 mijloacele segmentelor $[AC]$, $[OB]$, şi $[DE]$, obţinem $M_1\left(4;\frac{3}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{3}{2};3\right)$ şi

$M_3\left(-\frac{3}{2};24\right)$

Conform relației (1), cu coordonatele punctelor M_1, M_2, M_3 formăm determinantul

$$\begin{vmatrix} 4 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 3 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{24}{5} & 1 \end{vmatrix}$$

a cărui valoare este 0 şi deci punctelor M_1, M_2, M_3 sunt coliniare.

Q.E.D.

2. Să determinăm $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca punctele $A(-1;-2), B(2;3), C(5;\lambda)$ situate într-un plan raportat la un reper cartezian, să fie coliniare.

În adevăr, condiţia necesară şi suficientă ca punctele A, B, C să fie coliniare este ca:

(2) $$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

În determinantul (6) înlocuim elementele sale cu coordonatele punctelor A, B, C şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De unde deducem ecuaţia: $-3+2\lambda-10-15+\lambda+4=0 \Leftrightarrow 3\lambda=24 \quad \Leftrightarrow \lambda=8$.Q.E.D.

TRATAREA PROBLEMELOR DE COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ CU METODA COORDONATELOR

Profesor DĂLINESC DORIS
Şcoala Gimnazială Voiteg
Jud. Timiş

În geometria elementară, demonstraţiile diverselor proprietăţi geometrice sunt foarte variate şi multe dintre ele solicită inventivitate. Utilizând metoda coordonatelor, demonstraţiile se reduc la calcule algebrice mai mult sau mai puţin complicate. Pentru ilustrare considerăm un singur exemplu: concurenţa liniilor importante în triunghi.

În geometria elementară există o demonstraţie specifică fiecărui caz. Concurenţa mediatoarelor (respectiv bisectoarelor interioare) se demonstrează folosind proprietatea de loc geometric. Concurenţa înălţimilor se verifică folosind o construcţie ajutătoare care reduce problema la concurenţa mediatoarelor. Concurenţa mediatoarelor se demonstrează stabilind înâi lema care afirmă că două mediane se intersectează la distanţa de $\frac{2}{3}$ de vârful triunghiului.

Metoda coordonatelor oferă o metodă unitară pentru toate cele trei cazuri: aceea de a scrie ecuaţiile celor trei drepte (adică a mediatoarelor, a înălţimilor, a bisectoarelor interioare, respectiv a medianelor) şi a verifica dacă determinantul coeficienţilor este nul.

Teorema 1: Fie planul $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian şi fie trei puncte distincte $M_i(x_i; y_i)$, $i=1,2,3$, din $\mathcal{P}$. Punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă:

(3) $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstraţie:

Scriem ecuaţia dreptei determinată de punctele M_1 şi M_3:

(4) $$(x_3 - x_1)(y - y_1) = (y_3 - y_1)(x - x_1)$$

Punctele $M_i\,(i=1,2,3)$ sunt coliniare dacă şi numai dacă $M_2(x_2; y_2)$, aparţine dreptei M_1M_3, ceea ce este echivalent cu: $(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)$ adică $(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0$

Sau folosind determinanţii deducem că:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Q.E.D.

Similar, are loc:

<u>Teorema 2.</u>: Fie spaţiul **S** raportat la un reper cartezian şi fie $M_i(x_i; y_i; z_i)$, $i = 1,2,3,4$, patru puncte din **S**. Punctele M_1, M_2, M_3 şi M_4 sunt coplanare dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Teorema 3.</u>: Fie dreptele distincte $d_i : a_i x + b_i y + c_i = 0,\ a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $i = 1,2,3$. Dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente dacă şi numai dacă

(5) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Demonstraţie:</u>

Pentru ca cele trei drepte să fie concurente este necesar şi suficient să existe un punct $M(x_M ; y_M)$ şi numai unul ale cărui coordonate să fie soluţie a sistemului liniar de trei ecuaţii cu necunoscutele x, y:

(6) $$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \end{cases}$$

Dreptele d_i , $i = 1,2,3$ fiind neparalele, găsim $\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$, $i, j = 1,2,3;\ i \neq j$

Sistemul de ecuaţii (4) este compatibil determinat, dacă şi numai dacă determinantul caracteristic este nul, adică:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ Q.E.D.}$$

<u>Locuri geometrice în plan ce se prezintă sub forma unor curbe sau porţiuni de curbă</u>
Studiu de specialitate

Profesor DĂLINESC DANIEL LIVIU
Şcoala Gimnazială Livezile
Jud. Timiş

Un loc geometric important din geometria plană este arcul capabil de un unghi dat. Acesta va fi ilustrat prin următoarea problemă.

Problema 1:

Se consideră punctele fixe distincte A şi B şi un număr real α, $\alpha \in (0, \pi)$. Să se determine locul geometric al punctelor M situate într-unul din semiplanele limitate de dreapta AB, pentru care $m(\sphericalangle AMB) = \alpha$.

Rezolvare:

Se consideră punctele A şi B, $A \neq B$ şi $\boldsymbol{S}$ unul din semiplanele limitate de dreapta AB (vezi Figura 2.2.1).

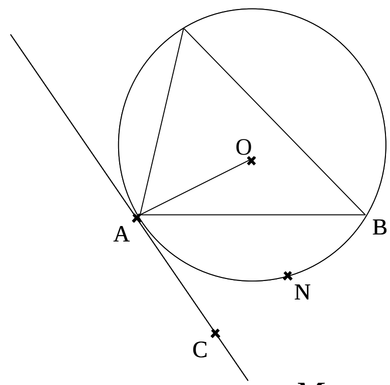


Figura 1

Fie semidreapta $(AC$ în semiplanul opus lui $\boldsymbol{S}$ astfel încât $m(\sphericalangle CAB) = \alpha$ şi O punctul de intersecţie al mediatoarea segmentului (AB) cu perpendiculara prin A pe $(AC$ pe cercul de centru O şi rază $r = OA$, punctele A şi B determină arcul AB situat în semiplanul $\boldsymbol{S}$.

Vom demonstra că acest arc, fără capetele A şi B este locul geometric căutat. Fie M un punct al arcului respectiv din semiplanul $\boldsymbol{S}$ şi N un punct al cercului care nu aparţine semiplanului $\boldsymbol{S}$. Atunci $m(\sphericalangle AMB)$ este jumătate din $m(\sphericalangle ANB)$.

Deoarece AC este tangentă cercului $(AC \perp AO)$, rezultă că $m(\sphericalangle CAB)$ este jumătate din $m(\sphericalangle ANB)$, deci $m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle CAB) = \alpha$. Mai trebuie arătat că pentru orice punct Q al semiplanului $\boldsymbol{S}$ nesituat pe arcul AB avem $m(\sphericalangle AQB) \neq \alpha$. Într-adevăr, dacă $Q \in Int(C(O,r)) \cap \boldsymbol{S}$ atunci $m(\sphericalangle AQB) > \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ANB) = \alpha$, deoarece $\sphericalangle AQB$ este un unghi cu vârful în interiorul cercului, iar dacă $Q \in Ext(C(O,r)) \cap \boldsymbol{S}$ atunci $m(\sphericalangle AQB) < \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ANB) = \alpha$. Arcul deschis AMB din semiplanul $\boldsymbol{S}$ astfel construit este locul geometric al punctelor M pentru care $m(\sphericalangle MAB) = \alpha$ şi se numeşte arc capabil de α faţă de segmentul $[AB]$ (fără A şi B).

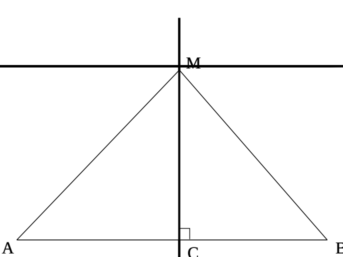
Observaţia 1

În problema anterioară arcul deschis ANB din semiplanul opus este arcul capabil de $\pi - \alpha$ faţă de segmentul $[AB]$. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, atunci obţinem un semicerc, (AB) fiind diametru.

Dacă în Problema 1 am văzut care este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă, în problema care urmează vom vedea ce se întâmplă dacă ne referim la raportul distanţelor la două puncte fixe. Este important să nu uităm instrumentele foarte puternice pe care le oferă metodele analitice. Astfel, problema care răspunde la întrebarea anterioară va fi rezolvată atât prin metodele geometriei sintetice cât şi cu ajutorul metodei coordonatelor.

Problema 2

Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la două puncte fixe distincte este constant.



Ipoteză:
A şi B - puncte fixe distincte,
$\boldsymbol{L} := \left\{ M \middle| \frac{MA}{MB} = k, k \in (0,+\infty) \right\}.$

Concluzie:
$\boldsymbol{L}$ este mediatoarea segmentului $[AB]$ în cazul când $k = 1,$ şi cercul de diametru $[CD]$ în cazul când $k \neq 1,$ unde punctele C şi D sunt prezentate mai jos.

Figura 2

Rezolvare:

Dacă A şi B sunt puncte fixe distincte dintr-un plan fixat, atunci pentru $k = 1$ avem că oricare ar fi M (din acel plan) cu proprietatea că $\frac{MA}{MB} = k$, M se află situat pe mediatoarea segmentului $[AB]$ deoarece $[MA] \equiv [MB]$ şi reciproc, dacă M este pe mediatoarea segmentului $[AB]$ atunci are loc relaţia $\frac{MA}{MB} = k$ (Teorema 1.1.1). De aceea în acest caz locul geometric căutat este mediatoarea segmentului $[AB]$ (vezi Figura 2.2.2).

Să presupunem acum $k \neq 1$ şi M un punct nesituat pe dreapta AB astfel încât $\frac{MA}{MB} = k$. Bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle AMB$ taie pe $[AB]$ în C. Deoarece $k \neq 1$ implică $AM \neq MB$, deci triunghiul ΔAMB nu este triunghi isoscel (vezi Figura 3).

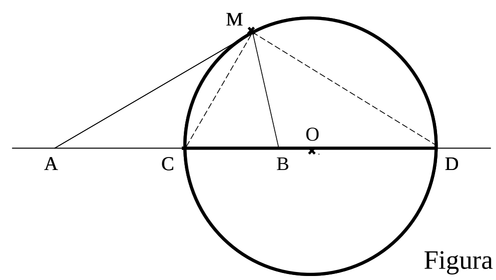


Figura 3

Fie D punctul de intersecţie dintre bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle AMB$ şi dreapta AB. În aceste condiţii, conform teoremei bisectoarei, au loc relaţiile:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} = k .$$

Astfel C şi D sunt puncte fixe pe dreapta AB. Ştim că măsura unghiului format de bisectoarea interioară şi de bisectoarea exterioară ale unui unghi dintr-un triunghi este de 90º. Deci putem afirma că punctul M se află pe cercul de diametru $[DC]$. Astfel intuim locul geometric cerut. Este vorba de cercul de diametru $[DC]$. Observăm că astfel am obţinut şi punctele care satisfac cerinţa problemei şi se află pe dreapta AB (şi anume punctele C şi D care împart de fapt $[AB]$ în raportul k). Dar, după cum am văzut în capitolul întâi din această lucrare problema încă nu este rezolvată complet. Mai trebuie să demonstrăm că orice punct de pe cercul respectiv satisface cerinţa problemei.

Fie M' (vezi Figura 2.2.4.) un punct al cercului de diametru $[CD]$, unde C şi D sunt punctele fixe de pe dreapta AB care împart $[AB]$ în raportul k. Deoarece $M'C \perp M'D$ (pentru că subîntinde un diametru) rezultă că în $\Delta AM'B$, $(M'C$ este bisectoarea interioară a $\sphericalangle AM'B$ şi $(M'D$ este bisectoarea exterioară a $\sphericalangle AM'B$.

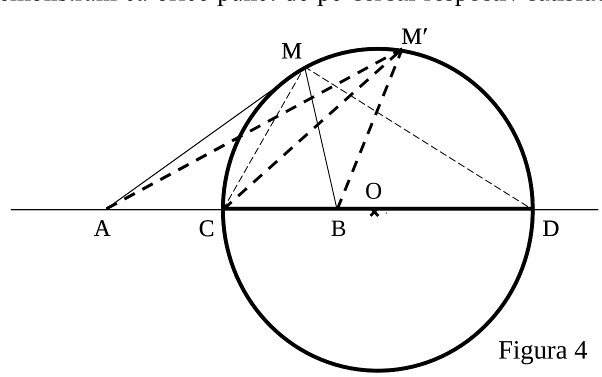


Figura 4

Conform teoremei bisectoarei avem: $\frac{M'A}{M'B}=\frac{CA}{CB}=k$. Deci M' respectă cerința problemei. În concluzie locul geometric este cercul de diametru $[CD]$. Acest cerc este cunoscut sub numele de *cercul lui Appollonius.*

Problema anterioară admite următoarea rezolvare analitică:

Fie A și B două puncte fixe distincte din plan. Alegem pe AB drept axă Ox și mediatoarea segmentului $[AB]$ orientată ca în Figura 5, drept axă Oy. În raport cu sistemul de coordonate ales avem $A(-a,0)$; $B(a,0)$, $a>0$.

Dacă $M(x,y)$ este un punct variabil în plan, atunci: $\frac{MA}{MB}=k$, unde $k>0 \Leftrightarrow MA=k\cdot MB \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2}=k\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(1-k^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)+2xa\cdot\left(1+k^2\right)+a^2\cdot\left(1-k^2\right)=0.$$

Pentru $k=1$ ecuația anterioară se reduce la $x=0$, deci locul geometric cerut este mediatoarea segmentului $[AB]$.

Pentru $k\neq 1$ ecuația anterioară reprezintă un cerc care taie axa Ox în punctele fixe $C\left(a\frac{k-1}{k+1};0\right)$ și $D\left(a\frac{k+1}{k-1};0\right)$ care împart segmentul în raportul k. Evident C este situat între A și B.

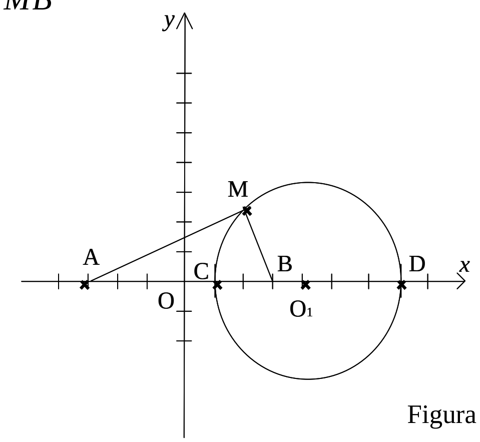


Figura 5

Pentru $k>1$, punctul *D* este la dreapta lui B, iar pentru $k<1$ punctul *D* este la stânga lui *A*. Deci locul cerut este cercul de diametru $[CD]$, unde sunt C și D sunt punctele fixe de pe dreapta AB care împart $[AB]$ în raportul k.

Dacă la problemele anterioare cercul (sau o porțiune dintr-un cerc) apăreau doar în urma rezolvării acestora, în problema următoare unul din punctele mobile cu ajutorul căruia se definește locul geometric se va deplasa pe un cerc.

Bibliografie:

- A. Moț, L. O. Pop: *„Modele de asimilare ale metodelor destinate educării creativității prin lecțiile de matematică”* – Editura Eurobit, Timișoara, 1998;

Locuri geometrice în spațiu ce se prezintă sub forma unor curbe, porțiuni de curbă sau suprafețe rotunde

Profesor DĂLINESC DANIEL LIVIU
Școala Gimnazială Livezile
Jud. Timiș

Este interesant de văzut ce se întâmplă cu locurile geometrice care se prezintă sub forma unor linii curbe, atunci când le extindem în spațiul euclidian.

Problema 1

Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu care au suma pătratelor distanţelor la două puncte fixe şi distincte constantă.

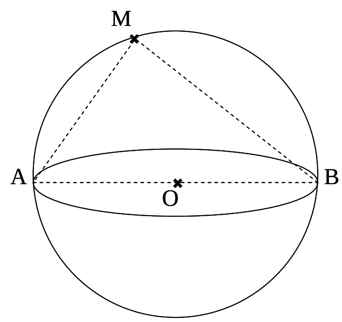


Figura 1

Rezolvare:

Fie O mijlocul segmentului $[AB]$. Deoarece O este mijlocul segmentului $[AB]$, avem că $[MO]$ este mediană în triunghiul MAB. Deci putem aplica formula medianei în triunghiul MAB şi vom obţine următoarea relaţie: $MO^2 = \frac{2\cdot\left(MA^2+MB^2\right)-AB^2}{4} = \frac{2k^2-AB^2}{4} =$ constant, deoarece k şi AB sunt constante, din ipoteză. În concluzie punctul M satisface condiţia cerută de problemă doar dacă $[MO]$ are lungime constantă şi anume $MO=\sqrt{\frac{2k^2-AB^2}{4}}$.

Discuţie:

- Datorită radicalului, condiţia de existenţă a punctelor M este $2k^2-AB^2\geq 0$.
- Dacă $2k^2=AB^2$, atunci punctul M coincide cu punctul O şi locul geometric se reduce la punctul O. Avem astfel, un exemplu de loc geometric în spaţiu care se poate reduce la mulţimea vidă sau doar la un punct.
- Dacă $2k^2-AB^2>0$, atunci locul geometric cerut de problemă este o sferă de centru O şi de rază $MO=\sqrt{\frac{2k^2-AB^2}{4}}$ (vezi Figura 1).

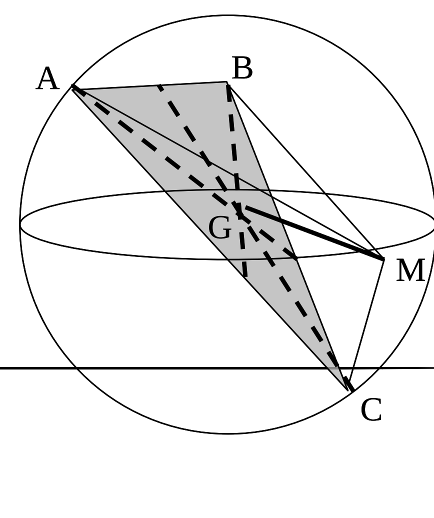
În problema care urmează vom preciza ce se întâmplă dacă mai adăugăm un termen la suma de pătrate din cerinţa de la problema precedentă.

Problema 2

Fie A, B, C trei puncte distincte, fixe. Determinaţi locul geometric al punctelor din spaţiu pentru care, $MA^2+MB^2+MC^2=k^2$, unde k este un număr real nenul dat.

Ipoteză:

A, B, C trei puncte distincte, fixe,



$k \in (0,+\infty)$,

$\boldsymbol{L} := \{M \mid MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2\}$.

Figura 2

Concluzie:

$\boldsymbol{L}$ poate fi mulţimea vidă, o mulţime ce conţine doar un punct sau o sferă, ce este precizată mai jos.

Rezolvare:

Să notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC (vezi Figura 2). După cum se ştie acesta se află la o treime faţă de bază şi două treimi faţă de vârf din fiecare mediană a triunghiului ΔABC. Atunci pentru orice punct M din spaţiu are loc egalitatea:

$$3 \cdot MG = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(BA^2 + CB^2 + AC^2\right) \quad (1).$$

Într-adevăr, fie X piciorul medianei din vârful A. Aplicând relaţia lui Stewart în triunghiul MAX, obţinem, ţinând seama că AG este două treimi din AX şi că GX este o treime din AX, relaţia: $3 \cdot MG^2 = MA^2 + 2 \cdot MX^2 - \frac{2}{3} \cdot AX^2$. Utilizând formula medianei pentru $[AX]$ în ΔABC şi pentru $[MX]$ în triunghiul ΔMBC, relaţia precedentă se transformă în relaţia (1). Deducem că punctul M are proprietatea $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$ dacă şi numai dacă $3 \cdot MG^2 = k^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(BA^2 + CB^2 + AC^2\right)$ care exprimă faptul că distanţa de la punctul M la punctul G este constantă. Deci locul geometric căutat este o sferă de centru G şi rază egală cu $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot k^2 - \frac{1}{9} \cdot \left(BA^2 + CB^2 + AC^2\right)}$.

Discuţie:

- Dacă $3 \cdot k^2 > BA^2 + CB^2 + AC^2$ atunci locul geometric este o sferă efectivă.
- Dacă $3 \cdot k^2 = BA^2 + CB^2 + AC^2$ atunci locul geometric se reduce la punctul G.
- Dacă $3 \cdot k^2 < BA^2 + CB^2 + AC^2$ atunci locul geometric este mulţimea vidă.

Deşi ne aflăm în spaţiul euclidian, nu este obligatoriu ca un loc geometric să descrie o suprafaţă curbă, uneori locul geometric se poate prezenta sub forma unei linii curbe plane.

Bibliografie:

❖ I. Vîrtopeanu, O. Vîrtopeanu: *„Geometrie în spaţiu pentru gimnaziu şi liceu”* – Editura Sibila, Craiova, 1994.

Ilustrarea determinării unor locuri geometrice cu ajutorul numerelor complexe
Studiu de specialitate

Profesor DĂLINESC DANIEL LIVIU

Şcoala Gimnazială Livezile
Jud. Timiş

Se ştie că dacă avem un număr complex $z = x + iy$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ şi $i^2 = -1$, atunci putem defini modulul lui z prin formula $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dacă r este un număr real pozitiv astfel încât

$r^2 = x^2 + y^2$ (adică $r'|z|$) atunci există $t \in [0,2\pi)$ cu proprietatea că $z = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$. Cu aceste notaţii putem discuta problemele următoare:

<u>Problema 1</u>

Să se reprezinte locul geometric al punctelor din plan ale căror afixe satisfac relaţia: $|z| \geq 1$.

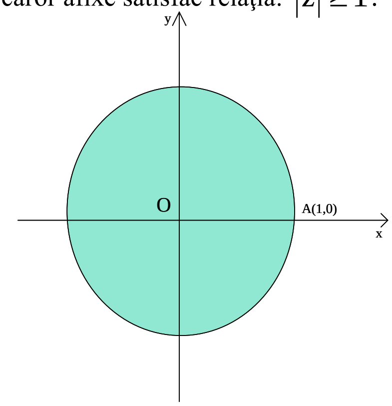


Figura1

<u>Rezolvare</u>:

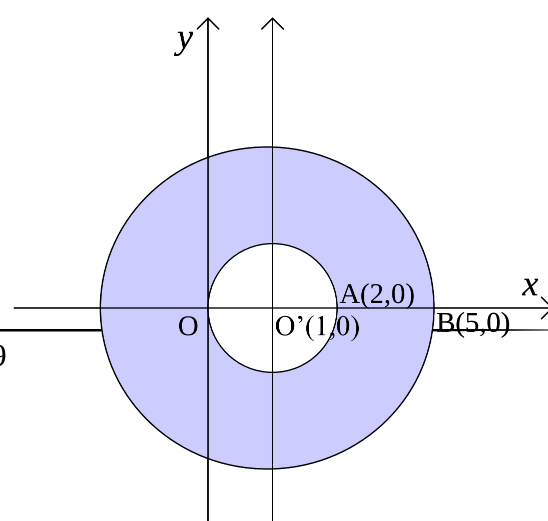
Dacă $z = x + iy$, atunci inegalitatea din enunţ este echivalentă cu relaţia $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$. Dar ştim că ecuaţia cercului cu centrul în originea sistemului de coordonate carteziene în plan şi de rază egală cu unitatea este $x^2 + y^2 = 1$ (vezi Figura 1).

Deci locul geometric cerut este:

$$\boldsymbol{M} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

În figură mulţimea $\boldsymbol{M}$ este ilustrată prin zona de culoare mai închisă. De fapt este vorba de mulţimea punctelor din plan mai puţin mulţimea punctelor care formează $Int(\boldsymbol{C}(0,1))$.

<u>Problema 2</u>



Să se reprezinte locul geometric al punctelor din plan ale căror afixe satisfac relaţia:

$1 < |z-1| < 2.$

Rezolvare:

Figura 2

Dacă $z = x + iy$, atunci inegalitatea din enunţ este echivalentă cu inegalităţile

$1 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 2,$

adică $1 < (x-1)^2 + y^2 < 4$. Dacă efectuăm translaţia de axe $X = x - 1$ şi $Y = y$, deci translatăm axa Oy la dreapta cu o distanţă egală cu o unitate, obţinem mulţimea punctelor căutate sub forma $\boldsymbol{M} = \{(X,Y) \in \boldsymbol{R^2} \mid 1 < X^2 + Y^2 < 4\}$, adică o coroană circulară deschisă.

Problema 3

Să se reprezinte locul geometric al punctelor din plan ale căror afixe satisfac relaţia $|z-i| < 1$.

Rezolvare:

Făcând un raţionament analog celui de la problema anterioară şi efectuând o translaţie de axe de ecuaţii $X = x$ şi $Y = y - 1$, inegalitatea din enunţ se mai scrie $\sqrt{X^2 + Y^2} < 1$, adică $X^2 + Y^2 < 1$, iar mulţimea căutată se poate scrie sub forma $\boldsymbol{M} = \{(X,Y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid X^2 + Y^2 < 1\}$, adică locul

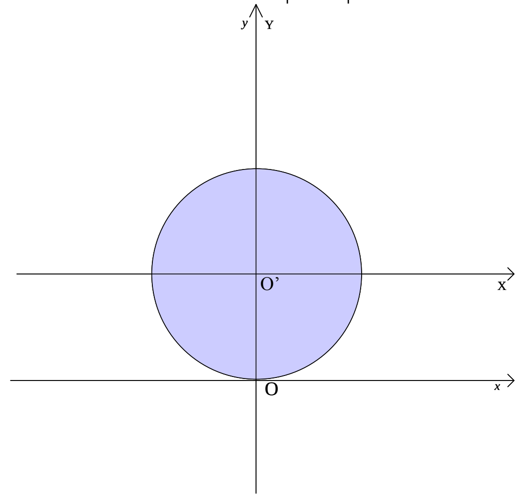


Figura 3

geometric căutat este discul deschis $D(O^{'},1)$, unde $O^{'}(0,1)$ este centrul discului în sistemul netranslatat (vezi Figura 3). Acest loc geometric este ilustrat prin zona de culoare mai închisă.

În paragraful următor vom vedea faptul că având cunoştinţe referitoare la locuri geometrice putem aborda şi alte tipuri de probleme.

Este interesant să studiem dacă între diferitele tipuri de probleme de geometrie există unele legături şi în ce mod cunoaşterea acestora ne poate ajuta la rezolvarea lor.

Bibliografie

1. T. Andreescu, I. V. Maftei, I. Tomescu: *„Probleme de matematică date la concursurile şi examenele din 1984” - 1658/1986;*

2. I. Drăghicescu, V. Masgras: *„Probleme de geometrie”* – Editura tehnică, Bucureşti, 1987.

Noţiunea de loc geometric privită din punct de vedere cinematic
Studiu de specialitate

Profesor DĂLINESC DANIEL LIVIU
Şcoala Gimnazială Livezile
Jud. Timiş

Noţiunea de loc geometric poate fi abordată şi în alt mod; astfel dacă definiţia anterioară prezintă noţiunea de loc geometric din punct de vedre static, ca o mulţime de puncte, este posibil să definim această noţiune şi din punct de vedere cinematic. Astfel putem să ne imaginăm un punct mobil Q care păstrează în tot timpul mişcării proprietatea dată şi descrie astfel locul geometric. În acest fel punctul Q coincide pe rând cu punctele locului geometric definit din punct de vedere static.

Definiţia 1

Numim loc geometric figura descrisă de un punct mobil Q care satisface o anumită proprietate dată.

În aceste condiţii locul geometric anterior ar putea fi prezentat astfel:

Fiind date două puncte distincte A, B într-un plan α astfel încât să avem în permanență $[MA] \equiv [MB]$.

Din aceste considerente se observă faptul că locurile geometrice şi implicit problemele de loc geometric se împart în:

(i) probleme în care locul geometric este precizat prin enunţ;
(ii) probleme în care enunţul cere şi precizarea locului geometric.

Pentru problemele de loc geometric nu există o metodă generală de rezolvare pe cale sintetică, aşa cum se întâmplă de obicei când se utilizează metode analitice, ci trebuie studiată cu atenţie figura corespunzătoare, pentru a desprinde elementele care pot reduce eventual problema la unul din locurile geometrice cunoscute. Trebuie subliniat, în mod deosebit, faptul că problemele de loc geometric constituie în bună măsură, probleme de sinteză, în sensul că solicită multe cunoştinţe de geometrie.

În rezolvarea problemelor de loc geometric este bine să se parcurgă următoarele etape :

(E1) Se construiesc puncte, eventual particulare, care au proprietatea locului geometric cerut sau intuit, arătând în acest fel că mulţimea punctelor ce-l formează nu este vidă.

(E2) Se observă elementele geometrice de poziţie fixă sau de măsură constantă, precum şi legătura lor cu cele variabile, folosind proprietăţiile corespunzătoare cunoscute.

(E3) Pe baza celor stabilite până acum şi folosind eventual locuri geometrice cunoscute anterior se intuieşte cărei mulţimi de puncte îi aparţin punctele locului geometric.

(E4) Se demonstrează că:

a) orice punct cu proprietatea locului geometric cerut aparţine mulţimii stabilite;
b) orice punct care aparţine mulţimii stabilite are proprietatea locului geometric cerut de problemă.

Dacă locul geometric este prezentat prin enunţ atunci se începe direct cu etapa a patra. Să parcurgem aceste etape rezolvând următoarea problemă:

<u>Problema 1</u>

Să se determine locul geometric al punctelor dintr-un plan α egal depărtate de o dreaptă m inclusă în planul α.

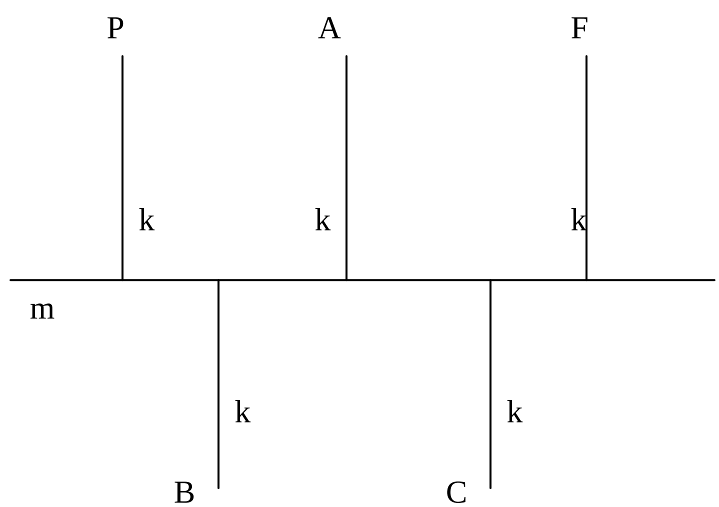


Figura 1

Rezolvare:

Vom rezolva această problemă respectând etapele anterioare:

(*E1*) Să construim câteva puncte ce respectă proprietatea dată (vezi Figura 1);

(*E2*) Observăm că în această problemă elementele fixe sunt dreapta m şi numărul real pozitiv k, iar dacă în desen privim doar la punctele locului geometric deja construite şi la dreapta dată putem să intuim locul geometric cerut (vezi Figura 2);

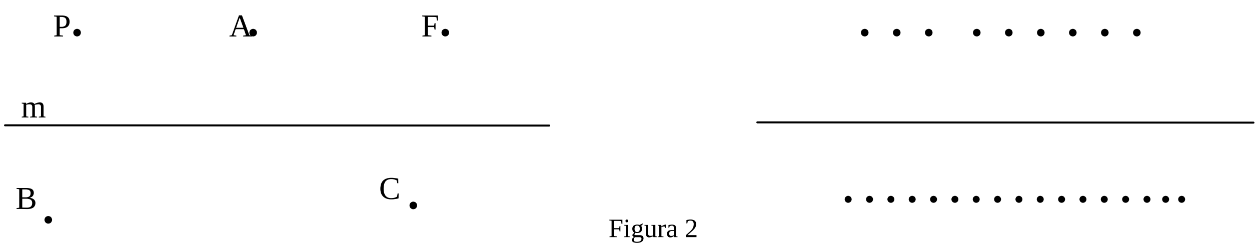


Figura 2

(*E3*) Desenul ne sugerează clar că locul geometric căutat este format din două drepte situate în planul α, paralele cu dreapta m;

(*E4*) Să trecem la demonstrarea corectitudinii constatării anterioare:

Să considerăm în planul α o dreaptă m şi două drepte g şi h din planul α care verifică condiţiile $\mathrm{d}(g,m)=k$ şi $\mathrm{d}(h,m)=k$, dreptele g şi h fiind situate de o parte şi de alta a dreptei m (vezi Figura 1.2.3).

Trebuie să demonstrăm că mulţimea $\boldsymbol{L}=\{P\in\alpha \mid \mathrm{d}(P,m)=k\}$ coincide cu reuniunea $g\cup h$.

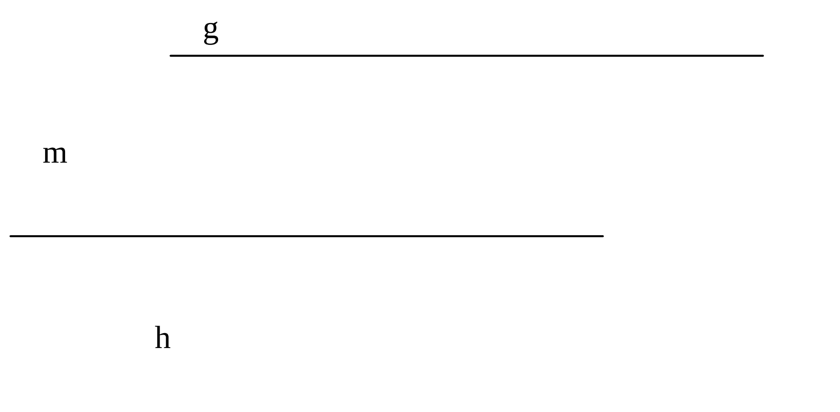


Figura 3

(a) Vom demonstra că oricare ar fi $T\in\boldsymbol{L}$ rezultă că $T\in g\cup h \Leftrightarrow T\in g$ sau $T\in h$. Fie $T\in\boldsymbol{L}$, T în acelaşi semiplan cu g determinat de m. Din $T\in\boldsymbol{L}$ rezultă că $\mathrm{d}(T,m)=k$ (vezi Figura 4).

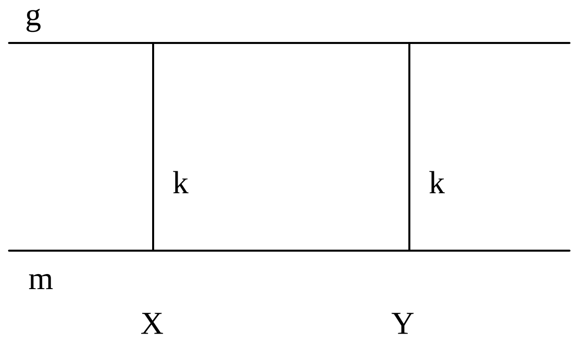


Figura 4

Deoarece $\mathrm{d}(g,m)=k$ rezultă că $g \parallel m$. Fie X piciorul perpendicularei din T pe m de unde avem $TX = k$. Fie $Q \in g$ şi Y piciorul perpendicularei din Q pe m de unde $QY = k$, deci rezultă că $[TX] \equiv [QY]$ (1).

Dar $TX \perp m, QY \perp m$, de unde avem $TX \parallel QY$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă că $TQYX$ este dreptunghi, deci $TQ \parallel m$ dar $g \parallel m$ şi $Q \in g \cap TQ$, de unde avem $TQ = g$, deci $T \in g$.

Dacă T se află în acelaşi semiplan cu h faţă de m atunci se demonstrează analog că $T \in h$.

Deci am demonstrat că oricare ar fi $T \in \boldsymbol{L}$ rezultă că $T \in g$ sau $T \in h \Leftrightarrow T \in g \cup h$. Putem afirma că $\boldsymbol{L} \subseteq g \cup h$.

(b) Vom demonstra că oricare ar fi $T \in g \cup h$ rezultă că $T \in \boldsymbol{L}$.
Dacă $T \in g \cup h$ rezultă $T \in g$ sau $T \in h$. Să considerăm că $T \in g$ (dacă $T \in h$ raţionamentul se face în mod analog celui prezentat în continuare).

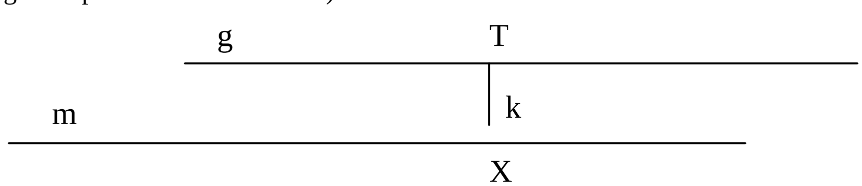


Figura 5

Deoarece $\mathrm{d}(g,m)=k$ din $T\in g$ rezultă $\mathrm{d}(T,m)=k$, de unde avem $T\in \boldsymbol{L}$. Deci $g\subseteq \boldsymbol{L}$ analog din $h\subseteq \boldsymbol{L}$ rezultă că $g\bigcup h\subseteq \boldsymbol{L}$.

Din (a) şi (b) rezultă că în adevăr, $\boldsymbol{L}=g\bigcup h$. (*q.e.d.*)

Bibliografie:
- V. Obădeanu: *„Probleme de loc geometric”* – Caiete metodico ştiinţifice, Universitatea din Timişoara, 1984;

Construcţii geometrice cu rigla şi compasul

Profesor DĂLINESC DANIEL LIVIU
Şcoala Gimnazială Livezile
Jud. Timiş

În cele ce urmează vom arăta cum locurile geometrice ne pot fi de un real folos în abordarea unor probleme interesante de geometrie, şi anume problemele de construcţie cu rigla şi compasul. Se pune întrebarea dacă există o legătură între problemele de construcţie cu rigla şi compasul şi problemele de loc geometric. La prima vedere răspunsul ar fi negativ, dar în continuare vom analiza mai profund această întrebare şi vom vedea că de fapt răspunsul este afirmativ şi că însuşirea tehnicilor de rezolvare a problemelor de loc geometric ne este de ajutor în rezolvarea problemelor de construcţie cu rigla şi compasul.

Construcţiile geometrice se fac cu ajutorul unor instrumente, dintre care cele mai importante sunt rigla şi compasul. Rigla serveşte la construirea dreptelor, iar compasul la măsurarea segmentelor, la construirea segmentelor congruente cu un segment dat şi la construirea cercului.

Problemele de construcţie sunt acele probleme de geometrie în care se cere să se construiască o anumită figură, cu ajutorul unor elemente date, sau construirea unei figuri în aşa fel, încât elementele ce o compun să aibă anumite proprietăţi, folosind numai compasul şi rigla (negradată).

Caracteristica construcţiilor geometrice constă în faptul că exactitatea fiecărei construcţii trebuie să fie motivată logic iar posibilitatea executării ei, cu instrumentele indicate, trebuie să fie demonstrată. Evident că problemele de construcţie pot fi privite ca o aplicare practică a cunoştintelor de geometrie. Cu rigla şi compasul pot fi făcute următoarele construcţii simple :

- construcţia unui segment de dreaptă ce trece prin două puncte distincte date ;
- determinarea punctului de intersecţie a două drepte date ;
- construcţia unui cerc de centru şi rayâză date ;
- determinarea intersecţiei dintre un cerc dat şi o dreaptă dată ;

- determinarea intersecţiei a două cercuri ;

Spunem că o problemă de construcţie este rezolvabilă cu rigla şi compasul, dacă pentru soluţionarea ei este necesar un număr finit de construcţii de tipul specificat anterior.

Rezolvarea unei probleme de construcţie constă nu atât în construirea figurii, cât în răspunsul la întrebarea cum să executăm această construcţie, precum şi demonstraţia respectivă. Dificultatea în rezolvarea problemelor de construcţie constă în a găsi ordinea în care se succed elementele de construcţie. Problema se consideră rezolvată dacă este indicat procedeul de construcţie a figurii şi este demonstrat că, în urma executării construcţiilor indicate, se obţine, intr-adevăr, figura cu proprietăţile cerute.

Unele probleme de construcţii sunt aplicarea directă a unor proprietăţi ale figurilor, sau a unor teoreme de geometrie (de exemplu, construirea, printr-un punct exterior unei drepte, a paralelei la acea dreaptă). Alteori, însă, problemele nu mai sunt aşa de simple. În general, pentru rezolvarea problemelor de construcţie cu rigla şi compasul se folosesc două metode :

a) metoda de a presupune problema rezolvată ;
b) metoda intersecţiei de locuri geometrice.

În rezolvarea unei probleme de construcţie se disting următoarele etape :

- <u>Etapa 1</u>: Analiza (aflarea soluţiei). În această etapă, se presupune problema rezolvată (adică figura construită) şi se caută proprietăţi, pe baza cărora se poate efectua construcţia.
- <u>Etapa 2</u>: Indicarea construcţiilor. Din analiza figurii rezultă anumite proprietăţi, care permit o înlănţuire de construcţii în vederea obţinerii rezultatului.
- <u>Etapa 3</u>: Demonsrarea exactităţii construcţiilor. Se arată că figura construită la „Etapa 2“ îndeplineşte cerinţele problemei. Prin urmare, aici, toate construcţiile utilizate trebuie justificate.
- <u>Etapa 4</u>: Discutarea soluţiilor. În această etapă se fac precizări referitoare la numărul construcţiilor şi la posibilitatea construcţiei.

Trebuie precizat faptul că regulile generale ce trebuiesc respectate sunt aceleaşi ca pentru demonstrarea teoremelor. La fel ca pentru locurile geometrice, va trebui să avem o echivalenţă (totală) între concluzia obţinută şi ipoteză. Aceasta, deoarece dacă, pe de o parte, construcţia găsită trebuie să rezulte din condiţiile date, pe de altă parte trebuie să ne convingem că orice figură formată prin această construcţie verifică, în mod necesar, condiţiile respective. Aici se relevă pregnant analogia care există între condiţiile date, pe de altă parte trebuie să ne convingem că orice figură formată prin această construcţie verifică, în mod necesar, condiţiile respective. Aici se relevă pregnant analogia care există între problemele de loc geometric şi problemele de construcţie cu rigla şi compasul.

Este evident că o bună însuşire a tehnicilor de rezolvare a problemelor de loc geometric ne va ajuta să rezolvăm în mod corect problemele de construcţii.

Să prezentăm în continuare metoda de rezolvare a problemelor de construcţie ce utilizează intersecţia locurilor geometrice.

Construcţia unei figuri geometrice se reduce, în definitiv, la construcţii de puncte. Un punct este, însă, determinat prin două condiţii (de exemplu, prin intersecţia a două drepte). Dacă se lasă de o parte una din condiţii, atunci toate punctele care îndeplinesc prima condiţie formează o mulţime de puncte care poate fi caracterizată ca fiind un loc geometric. De asemenea, dacă lăsăm la o parte cealaltă condiţie, atunci punctele care îndeplinesc condiţia rămasă definesc de fapt un alt loc geometric. În concluzie punctul căutat (în problema de construcţie dată) este determinat de intersecţia dintre cele două locuri geometrice. Metoda intersecţiei de locuri geometrice este întrebuinţată, cu mult folos, în construcţii de triunghiuri, patrulatere, cercuri.

Generalităţi despre noţiunea de loc geometric

Profesor DĂINESC DANIEL LIVIU
Şcoala Gimnzială Livezile
Jud. Timiş

Pentru noţiunea de loc geometric sunt date mai multe definiţii. Astfel dacă consultăm diferite dicţionare ale limbii române găsim:

loc geometric = totalitatea punctelor dintr-un spaţiu definite printr-o proprietate comună;

loc geometric = mulţimea punctelor din plan sau din spaţiu care au o anumită proprietate;

loc geometric = figură plană sau în spaţiu ale cărei puncte se definesc toate prin aceeaşi proprietate.

Toate aceste formulări, dincolo de aparenţe relevă un lucru: un loc geometric este o anumită mulţime de puncte. Pentru predarea acestei noţiuni, chiar elevilor de clasa a VI-a (deci situându-ne în geometria elementară) considerăm că putem defini noţiunea de loc geometric astfel:

Definiţia 1

Numim loc geometric o mulţime de puncte din plan sau spaţiu caracterizate printr-o proprietate geometrică comună.

Pentru a avea posibilitatea de a oferi un exemplu de loc geometric trebuie, în prealabil, să precizăm modul în care verificăm dacă o mulţime de puncte este un loc geometric, practic să rezolvăm probleme de loc geometric. Rezolvarea unor astfel de probleme se poate face prin mai multe metode. În continuare o să prezentăm un exemplu de loc geometric din geometria plană utilizând una din cele mai simple metode, metodă care se pretează şi la nivelul elevilor de gimnaziu.

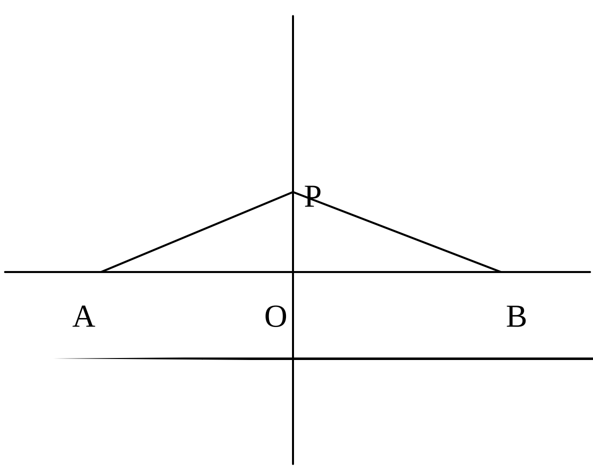
Pentru a demonstra că locul geometric $\boldsymbol{L}$ al punctelor care au proprietatea $\boldsymbol{P}$ este o mulţime $\boldsymbol{M}$, adică $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$, trebuie să arătăm că:

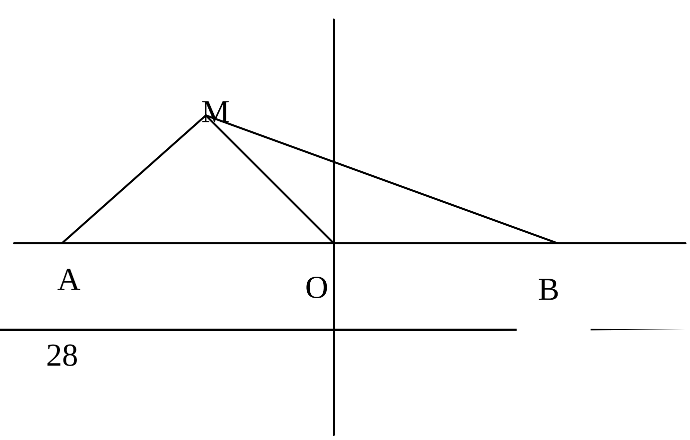
(1) *Orice punct al mulţimii* $\boldsymbol{M}$ *are proprietatea* $\boldsymbol{P}$;
(2) *Orice punct care are proprietatea* $\boldsymbol{P}$ *aparţine mulţimii* $\boldsymbol{M}$ *(sau dacă un punct nu aparţine mulţimii* $\boldsymbol{L}$*, atunci acel punct nu are proprietatea* $\boldsymbol{P}$).

Un exemplu fundamental de loc geometric se regăseşte în următoarea teoremă:

Teorema

Fiind date două puncte distincte A şi B într-un plan α, locul geometric al punctelor M din planul α, pentru care $[MA] \equiv [MB]$, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB, inclusă în planul α şi care trece prin mijlocul segmentului $[AB]$.





d d

Figura 1

Demonstraţie:

1) Fie O mijlocul segmentului $[AB]$ şi fie d perpendiculara dusă prin O pe dreapta AB. Dacă $P \in d$ atunci se observă că $\Delta OAP \equiv \Delta OBP$ deoarece sunt triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente, deci $[AP] \equiv [PB]$ de unde rezultă că $P \in \boldsymbol{L}$, $(\forall) P \in d$. Practic am demonstrat că $d \subseteq \boldsymbol{L}$.

2) Fie M un punct din planul α astfel încât $[MA] \equiv [MB]$, adică un punct oarecare din mulţimea $\boldsymbol{L}$. Să considerăm că $M \notin AB$, deoarece ΔMAB este triunghi isoscel cu $[MO]$ mediana dusă din vârful său deci $MO \perp AB$, dar şi $d \perp AB$ în punctul O, rezultă că $d = MO$, deci $M \in d$. Dacă $M \in AB$ şi $[MA] \equiv [MB]$ atunci $M = O$, deci $M \in d$. Deoarece din $M \in \boldsymbol{L}$ rezultă $M \in d$, cu M oarecare, avem că $\boldsymbol{L} \subseteq d$. Punctul M poate să fie situat şi în altă regiune a planului α delimitată de cele două drepte. În acest caz avem un raţionament similar cu cel prezentat anterior. Din 1) şi 2) rezultă că $\boldsymbol{L} = d$, în consecinţă locul geometric căutat este dreapta d.

(*q.e.d.*)

Observaţie

Dreapta d se numeşte mediatoarea segmentului $[AB]$.

CUPRINS