Studiul polinoamelor cu coeficienţi complecşi

Profesor Dragomir Liliana

Fie $C^{(N)}$ mulţimea tuturor şirurilor (infinite) de numere complexe, $f=(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots, a_n,\ldots)$, care au un număr finit de termeni nenuli.

De exemplu $f=(0, 0, -1, 2, 0, \ldots, 0,\ldots)$ are 2 termeni nenuli

$g=(i, 7+2i, -5, 0, \ldots, 0,\ldots.)$ are o infinitate de termini, dar doar 3sunt nenuli.

Definim pe $C^{(N)}$ doua operaţii algebrice : adunarea şi inmulţirea astfel:

Fie $f=(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ şi $g=(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, cu f,g $C^{(N)}$.

Atunci definim $f+g=(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots)$ şi

$f\cdot g=(c_0, c_1, c_2,\ldots)$ unde $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,\ldots$

Observăm că şi f+g respective $f\cdot g$ $C^{(N)}$. Elementul $f+g=(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots)$ se numeşte suma dintre f şi g, iar operaţia prin care oricăror elemente f şi g din $C^{(N)}$ se asociază suma lor se numeşte <u>adunare</u>. Elementul $f\cdot g=(c_0, c_1, c_2,\ldots)$ se numeşte produsul dintre f şi g, iar operaţia prin care elementelor f şi g din $C^{(N)}$ se asociază produsul lor se numeşte <u>înmulţire.</u>

Exemple: Fie $f=(-1, 2, 3, -5, 0, \ldots)$ şi $g=(1, 0, -1, 0, \ldots)$.

Atunci $f+g=(0, 2, 2, -5, 0, \ldots)$

$f\cdot g=(-1, 2, 4, -7, -3, 5, 0, \ldots)$

Fiecare element al multimii $C^{(N)}$, pe care sânt definte cele două operaţii se numeşte polinom. Dacă $f=(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots, a_n,\ldots)$ este un polinom, numerele $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots$ se numesc coeficienţii lui f.

Notam C' o submulţime a lui $C^{(N)}$ formată din toate şirurile de forma (a, 0, 0, 0,…), unde aC.

Fie funcţia f: C→ C' definită prin egalitatea f(a)=(a, 0, 0, …), este o funcţie bijectivă.

Operaţiile de adunare şi de înmulţire se transcriu astfel :

$(a, 0, \ldots)+(b, 0, \ldots)=(a+b, 0, \ldots)$

$(a, 0, \ldots)\cdot(b, 0, \ldots)=(a\cdot b, 0, \ldots)$.

Observăm că adunarea şi înmulţirea în C' se face după aceleaşi reguli ca adunarea şi înmulţirea numerelor complexe, deci C' are aceleaşi proprietăţi aritmetice ca mulţimea numereloe complexe ceea ce ne permite să identificăm polinomul f=(a, 0, …) cu numărul complex a. deci polinoamele de forma f=(a, 0, …)=a se numesc polinoame constante.

Proprietăţile adunării polinoamelor:

a) Adunarea este asociativă , adică : (f+g)+h=f+(g+h);
b) Elementul neutru faţă de adunarea polinoamelor estr polinomul constant 0=(0, 0, …)
f+0=0+f=f;
c) Fiecare polinom f are un opus nota t–f astfel încat:
f+(-f)=(-f)+f=0;
d) Adunarea polinoamelor este comutativă , adică : f+g=g+f, oricare ar fi f, g, h $C^{(N)}$

Proprietaţile înmulţirii polinoamelor:

a) Înmulţirea polinoamelor este asociativă , adică: $(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$;
b) Elementul neutru faţă de înmulţirea polinoamelor este polinomul 1=(1, 0,…)
$1\cdot f=f\cdot 1=f$
c) Înmulţirea polinoamelor este comutativă, adică: $f\cdot g=g\cdot f$, oricare ar fi f, g, h $C^{(N)}$
d) Înmulţirea polinoamelor este distributivă la dreapta si la stǎnga faţă de adunarea lor, adică:
$f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$ şi
$(g+h)\cdot f=g\cdot f+h\cdot f$

Deci tripletul ($C^{(N)}$, +, ·) este inel comutativ

<u>Forma algebrică a polinoamelor</u>:

Notaţia $f=(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots, a_n,\ldots)$ nu este prea comodă în operaţiile cu polinoame. De aceea vom folosi $f=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$, numită forma algebrică a <u>polinoamelor într-o singură nedeterminată cu coeficienţi complecşi.</u>iar notaţia $C^{(N)}$ va deveniC[X].

Mulţimea C[X] are numeroase submulţimi importante:

N[X]- mulţimea polinoamelor cu coeficienţi naturali

Z[X]- mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi

Q[X]- mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali

R[X]- mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali.

Avem următoarea incuziune între aceste mulţimi:

N[X]Z[X]⊂Q[X]⊂R[X]⊂C[X]

<u>Gradul unui polinom</u>:

Fie $f= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$ un polinom din C[X].

Se numeşte gradul polinomului f, cel mai mare numar natural n astfel încȃt a_n0, notat gradf. În acest caz a_n se numeşte coeficientul dominant al polinomului f iar a_0 termenul liber.

Referitor la gradul sumei şi al produsului avem următoarele relaţii:

a) grad(f+g)max(gradf, gradg)
b) $grad(f\cdot g)$=gradf+gradg, dacă f şi g sunt polinoame nenule.

<u>Valoarea unui polinom . Funcţia polinomială;</u>

Fie $f= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$ un polinom din C[X].

Atunci numărul $f(\alpha)= a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3+\ldots+a_n\alpha^n$ se numeşte valoare polinomului f în α

Dacă f, g sunt două polinoame şi α un număr arbitrar atunci:

a) $(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$
b) $(f\cdot g)(\alpha)= f(\alpha)\cdot g(\alpha)$
c) Dacă f este un polinom cu coeficienţi reali şi z un număr complex atunci:

f()=.

Fie A şi B două submulţimi ale lui C. Atunci funcţia f:A→B se numeşte funcţie polinomială dacă există un polinom PC[X] astfel încat f(α)=P(α) A.

Împarţirea polinoamelor;

Fiind date două polinoame f şi g cu g0, atunci există două polinoame q şi r astfel încat: f=gq+r, cu grad r < grad g, în plus polinoamele q şi r sunt unice.

Fie f şi g=x-a, două polinoame din C[X].

Restul împarţirii lui f la g este egal cu f(a)

Divizibilitatea polinoamelor:

Fie f şi g două polinoame . spunem că polinomul f este divizibil prin polinomul g dacă există un polinom h astfel încật f=gh.

În acest caz f se numeşte multiplul lui g şi al lui h, iar g şi h sunt divizorii lui f şi se noteaza g | f

Proprietăţi:

a) Din teorema de împărţire cu rest rezultă că f este divizibil prin g dacă şi numai dacă restul împărţirii polinomului f la g este zero.
b) Dacă g | f si f0 atunci grad ggrad f
c) Polinoamele de grad zero divid orice polinom
d) Daca f este un polinom şi aC, a0 atunci af |f
e) Relaţia de divizibilitate este :
    - reflexivă, adică f | f
    - tranzitivă , adică dacă h | g şi g | f atunci h | f.
    - dacă g | f_1 şi g | f_2 iar h_1şi h_2 sunt polinoame arbitrare, atunci g | $f_1h_1+f_2h_2$

Cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

Fie f şi g două polinoame . un polinom d se numeşte un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g dacă verifică condiţiile:

- d | f şi d | g
- dacă un polinom d'|f şi d'|g atunci d'| d.

Dacă f şi g sunt două polinoame atunci există un c.m.m.d.c. al lor.

Spunem că f şi g sunt prime între ele dacă 1 este c.m.m.d.c. al lor.

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor;

Fie f şi g două polinoame . un polinom m se numeşte un cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f şi g dacă verifică condiţiile:

- f | m şi g | m
- orice alt multiplu comun m' al lui f şi g este şi multiplul lui m.

Fie f şi g două polinoame dintre care cel puţin unul nenul. Dacă d este c.m.m.d.c. al lui f şi g atunci m= este c.m.m.m.c. al lui f şi g.

Aplicatii:

Mulţimea numerelor complexe

Prof. Liliana Dragomir

Una dintre temele favorite ale matematicienilor de-a lungul istoriei a fost rezolvarea ecuaţiilor. În timp ce ecuaţiile de gradul întai sunt toate rezolvabile în multimea numerelor reale, nu toate ecuaţiile de gradul doi au aceasta proprietate. Cea mai simpla astfel de ecuaţie este: $x^2+1=0$

Pana în secolul 18, matematicienii au evitat ecuaţiile pătratice care nu sunt rezolvabile în multimea numerelor reale. Leonhard Euler a spart gheata introducand numarul -1 în renumita sa carte „Elements of Algebra".

Euler a notat acest numar cu i, spunându-i numarul imaginar şi acest i a devenit una dintre cele mai folositoare notaţii în matematica.

Studiul numerelor complexe a continuat în ultimele doua secole. Practic, este imposibil să ne imaginăm matematica modernă fără numere complexe.

Absolut toate ramurile matematicii se folosesc de aceste numere într-o oarecare măsura. Ele au aplicabilitate şi în alte domenii, cum ar fi: mecanica, fizica teoretică, hidrodinamica şi chimie.

Mărimile scalare sunt mărimile caracterizate complet printr-un număr pozitiv sau negativ. Ex: masa, densitatea, volumul, temperatura, caldura, etc. Mărimile vectoriale (vectorii) sunt mărimile complet caracterizate de modul (valoare absoluta), de direcţie şi de sens. Direcţia şi sensul dau orientarea vectorului. Dacă una din caracteristicele vectorului se modifică avem de a face cu un alt vector.

Exemple de mărimi vectoriale: forta de greutate, forta elastica, forta de frecare ; deplasarea

Forma algebrica a numerelor complexe:

Fie R mulţimea numerelor reale. Prin RR produsul cartezian al mulţimii R cu ea însăşi, înţelegem

RR={(a, b)| a,bR}.

Elementele din RR se numesc perechi.

Pe aceasta mulţime putem define operaţiile de: adunare şi produs , astfel:

1. Fie $z_1=(a_1, b_1)$ si $z_2=(a_2, b_2)$.
   Definim $z_1+z_2=(a_1+a_2, b_1+b_2)$ RR, oricare ar fi $z_1$si z_2 RR
2. Fie $z_1=(a_1, b_1)$ si $z_2=(a_2, b_2)$.
   Definim $z_1\cdot z_2=(a_1a_2- b_1b_2, a_1b_2+ b_1a_2)$ RR, oricare ar fi $z_1$si z_2 RR

Arătam in continuare ca ecuatia $x^2+1=0$ are solutii in RR.

Fie x=(0, 1) RR atunci

$x^2=x\cdot x=(0, 1)\cdot(0, 1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1, 0)=-1$.

Elemental (0, 1) se noteaza prin i şi se numeşte unitatea imaginara şi **$i^2=-1$**.

Calculand produsul $b\cdot i=(b, 0)\cdot(0, 1)=(0, b)=ib$. Atunci un element zRR se poate scrie $z=(a, 0)\cdot(0, b)=a+bi$

Deci multimea C={a+bi | a,bR, şi i reprezintă unitatea imaginară}se numeşte multimea numerelor complexe.

Numărul real **a** reprezinta partea reala a numărului complex, iar numărul real **b** reprezintă partea imaginară a numărului complex. Deci un număr complex este format din parte reală şi parte imaginară ceea ce înseamna ca este un vector.

Pentru ca două numere complexe să fie egale, ele trebuie să aibe părţile reale egale şi părţile imaginare egale.

Operatii cu numere complexe:

1. Adunarea numerelor complexe

Pornind de la adunarea din RR obtinem:

Fie z_1=a+bi si z_2=c+di atunci:

z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i

Proprietatile adunarii numerelor complexe:

Ordinea in care se dau proprietatile adunarii numerelor complexe trebuie sa fie cea uzuala in axiomatica spatiului liniar abstract.

a) adunarea numerelor complexe este asociativa , adica:
$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
b) Elemental neutru fata de adunarea numerelor complexe este numarul complex 0=0+0i, adica z+0=0+z=z, oricare ar fi zC
c) Orice numar complex z admite un opus notat –z astfel incat z+(-z)=-z+z=0
Daca z=a+bi atunci –z=-a-bi.
d) Adunarea numerelor complexe este comutativa , adica:
$z_1+z_2 = z_2+z_1$ oricare ar fi $z_1$si z_2 C

2. Scaderea numerelor complexe
Prin scaderea numerelor compexe z_1- z_2 intelegem adunarea lui z1 cu opusul lui z_2. Adica z_1- z_2=z_1+(-z_2)
3. Inmultirea numerelor complexe
Pornind de la inmultirea din RR obtinem:
Fie z_1=a+bi si z_2=c+di atunci:
$z_1\cdot z_2$=ac-bd+(ad+bc)i

Proprietatile inmultirii numerelor complexe:

Ordinea in care se dau proprietatile inmultirii numerelor complexe trebuie sa fie cea uzuala in axiomatica spatiului liniar abstract.

a) inmultirea numerelor complexe este asociativa , adica:
$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$
b) Elemental neutru fata de inmultirea numerelor complexe este numarul complex 1=1+0i, adica z·1=1·z=z, oricare ar fi zC
c) Orice numar complex z admite un invers notat z^{-1} astfel incat $z\cdot z^{-1} = z^{-1}\cdot z=1$
Daca z=a+bi atunci z^{-1}=
d) Inmultirea numerelor complexe este comutativa , adica:
$z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$ oricare ar fi $z_1$si z_2 C
e) Inmultirea numerelor complexe este distributiva la dreapta si la stinga in raport cu adunarea lor, adica:
$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ si
$(z_2+z_3)\cdot z_1=z_2\cdot z_1+z_3\cdot z_1$, oricare ar fi z_1, z_2 si z_3 C

In consecinta tripletul (C, +, ·) formeaza o structura algebrica de corp comutativ.

Multimea numerelor complexe nu este o multime ordonata, adica un numar complex nu poate fi mai mare sau mai mic decat altul.

Puterile lui i

Pornind de la i^2=-1 obtinem;

i^n =

Conjugatul unui numar complex

Fie z= a+bi, un numar complex atunci numarul notat = a-bi se numeste conjugatul lui z.

Proprietati :

a) z+ R;
b) z· R_+;
c) =+;
d) =·;
e) =;
f) zR daca si numai daca z=
g) zC\R daca si numai daca z= -

Demonstraţie:

a) fie z=a+bi atunci =a-bi, atunci z+=a+a+(b-b)i=2aR
b) fie z=a+bi atunci =a-bi, atunci z·=a·a+b·b+(-ab+ba)i=a^2+b^2 R_+
c) fie z_1=a+bi si $z_2$atunci = a+c+(b+d)I, si =a+c-(b+d)i
+=a+c+(-b-d)i=a+c- (b+d)i
d) procedam la fel ca la c)

Un numar complex find un vector este caracterizat prin directie , sens si lungime.

Prin lungimea unui numar complex intelegem modulul sau.

Modulul unui numar complex z=a+bi, se noteaza cu| z |=

Proprietatile modulului unui numar complex:

a) | z |0 si | z |=0 daca si numai daca z=0 oricare ar fi zC
b) | z |=|- z |=| |,
c) | |= | |·| |
d) | |=
e) | | | |+| |

oricare ar fi zC.

Bibliografie :

1. N.MIHAILEANU,Utilizarea numerelor complexe in geometrie, Editura tehnica , Bucuresti,1968
2. CRAIOVEANU M., I.D.ALBU, Geometrie afina si euclidiana, Editura Facla, Timisoara,1982
3. M. GANGA, Manual de matematica clasa a XII-a , Editura Mathpress, 2005.

Vectori in plan

Prof. Liliana Dragomir

În esenţă, geometria este studiul proprietăţilor figurilor (mulţimilor de puncte) din spaţiu. Aceasta nu este o disciplină matematică închisă (suficientă sieşi) aşa cum nici matematica în ansamblu nu este astfel, ci s-a conturat şi dezvoltat într-un efort de modelare a lumii fizice şi există în virtutea interconexiunilor ei cu alte discipline matematice precum şi pe baza unor reveniri la modelări din ce în ce mai fidele ale unor fenomene din lumea înconjurătoare.

Una dintre cele mai importante noţiuni geometrice create în mod special pentru a modela situaţii din lumea fizică este cea de vector liber.

Există mărimi fizice care sunt complet caracterizate de măsura lor (un număr real). De exemplu, temperatura unui corp, lungimea unei bare, suprafaţa unei foi de tablă, rezistenţa unui conductor ş.a. Pe de altă parte, există mărimi fizice pentru a căror caracterizare completă sunt necesare şi alte elemente. Astfel, pentru a descrie forţa cu care locomotiva acţionează asupra unei garnituri de vagoane, trebuie să precizăm intensitatea ei (un număr real), dar şi direcţia şi sensul ei de acţiune.

Aşadar, există mărimi fizice care necesită şi alte atribute decât măsura lor şi anume direcţie şi sens. Asemenea mărimi se numesc mărimi vectoriale, iar cele caracterizate complet de un număr se numesc mărimi scalare.

Noţiunea de vector liber, model geometric pentru numeroase aspecte ale realităţii, este un instrument important de aplicare a geometriei în practică, direct sau prin intermediul altor dicipline ştiinţifice.

Motivele pentru care trebuie sa studiem vectorii sunt acestea:

1. Vectorii liberi şi operaţiile cu ei oferă o cale de a exprima unitar şi elegant noţiuni şi rezultate de geometrie. Studiul transformărilor geometrice şi geometria analitică beneficiază enorm de folosirea vectorilor.
2. Calculul cu vectori liberi poate fi folosit în rezolvarea unor probleme de geometrie, unele chiar foarte rezistente la o abordare directă. Se vorbeşte curent de metoda vectorială ca metodă de rezolvare a problemelor de geometrie.
3. Structura algebrică a mulţimii vectorilor liberi oferă un model (abstract) pentru noţiunea, probabil cea mai importantă a matematicii contemporane, de spaţiu liniar (numit uneori şi vectorial) peste un câmp oarecare.
4. Terminologia legată de vectori s-a extins şi asupra altor domenii ale matematicii, oferind căi uşoare de înţelegere şi interpretare a unor rezultate foarte abstracte.

Strategia optimă este de a introduce noţiunea de vector şi operaţiile cu vectori într-o manieră neformală, prin consideraţii geometrice simple, pe baza intuiţiei sprijinită de o terminologie specifică, mai întâi în plan şi apoi în spaţiu.

Începem prin a aminti o definiţie formală a noţiunii de vector liber:

Numim segment orientat o pereche ordonata (A, B) de puncte din spatiu. Vom nota (A, B) prin si vom spune ca A este originea si B este extremitatea segmentului orientat . Daca A=B atunci segmentul se va numi segment orient nul. Dreapta AB se numeste dreapra suport a segmentului orientat .

Spunem ca segmentele orientate   si   au aceeasi directie daca dreptele lor suport au aceeasi directie(deci sunt paralele sau coincid).

Fie doua segmente orientate   si   nenule de aceeasi directie.Daca dreptele lor suport coincid , vom spune ca   si   au acelasi sens daca sunt ambele pozitiv sau negativ orientate.Lungimea unui segment orientat nenul este lungimea segmentului AB sau distant de la A la B. Segmentele orientate nule au lungime zero.

Spunem ca doua segmente nenule sunt echipolente daca au aceeasi directie, acelasi sens si aceeasi lungime.

Relatia de echipolenta este o relatie de echivalenta pe multime segmentelor orientate din spatiu.

Clasele de echivalenta in raport cu relatia de echipolenta se numesc vectori liberi. Clasa de echipolenta a segmentului orientat se noteaza cu si se citeste vectorul . Uneori vectorii se noteaza prin : , , ,…, , ,…
Vectorul se noteaza prin si reprezinta vectorul nul.

<u>OPERAŢII CU VECTORI</u>

În mod obişnuit, la nivelul şcolii de cultură generală, operaţiile de adunare a doi (sau mai mulţi) vectori, de înmulţire a unui vector cu un număr real şi de produs scalar a doi vectori sunt suficiente pentru ilustrarea metodei vectoriale de rezolvare a problemelor de geometrie.

Produsul vectorial a doi vectori este mult mai necesar la fizică şi, în consecinţă, este introdus în programa analitică de fizică.

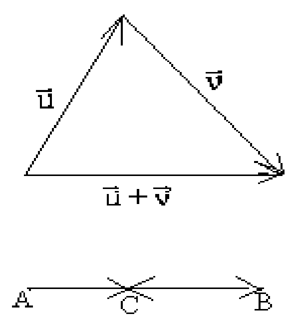
Operaţiile menţionate se pot defini direct, geometric sau prin intermediul coordonatelor.

Experienţa de compunere a două forţe care acţionează pe direcţii diferite conduce la "regula paralelogramului" de adunare a doi vectori. Este preferabil să definim mai întâi adunarea a doi vectori după "regula triunghiului" care are un caracter unitar în sensul că "prinde" şi cazul vectorilor coliniari în acelaşi enunţ.

Regula triunghiului:

Fie doi vectori şi şi un punct A fixat. Sunt unic determinate punctele *B* şi C încât şi . Definim suma + = adică = .Dacă desenăm, obţinem fig. 1, cele două situaţii fiind corespunzătoare respectiv cazurilor şi necoliniari şi coliniari.

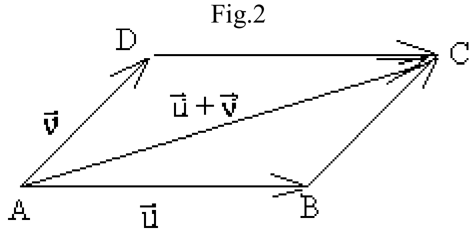
Fig 1



Regula paralelogramului:

Fie doi vectori şi şi un punct A fixat, Sunt unic determinate punctele B ,C si D încât şi . Vectorul sumă poate fi reprezentat şi ca o diagonală a paralelogramului construit pe câte un reprezentant al vectorilor şi cu aceeaşi origie, diagonala care pleacă din A adica + =, =

Fig.2



Cum un asemenea paralelogram există numai când şi sunt necoliniari, urmează că asemenea reprezentare a vectorului sumă este posibilă numai în acest caz şi deci "regula paralelogramului" de adunare a doi vectori funcţionează numai când ei sunt necoliniari. Se poate imagina o degenerare a paralelogramului prin "turtirea" lui pe *AB*, pentru a include vectorii coliniari, dar este, totuşi, de preferat "regula triunghiului" pentru adunarea vectorilor coliniari.

Proprietatile adunarii vectorilor:

Ordinea in care se dau proprietatile adunarii vectorilor trebuie sa fie cea uzuala in axiomatica spatiului liniar abstract.

1. Adunarea vectorilor este asociativa adica
   +)+ = +(+)
2. Elementul neutru fata de adunarea vectorilor este vectorul nul
   + = + =
3. Oricare ar fi vectorul , exista vectorul - astfel incat
   +(-) =- + =
4. Adunarea vectorilor este asociativa adica
   + = + , oricare ar fi vectorii

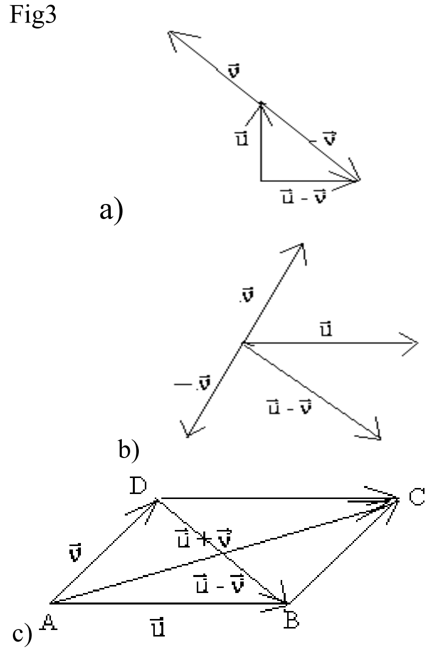
Demonstratie:

1. Fie , si = atunci:
   + = =
   +)+ = +=
   += +=
   +(+)=+=
2. Fie si = atunci:
   + = + ==
   + =+ = =
3. Fie atunci -= si deci :
   +(-)=+= =
   - + = + = =

Diferenţa a doi vectori

Diferenţa a doi vectori se defineşte ca adunarea primului cu opusul celui de- al doilea: - = +(-). Cele două reguli de adunare conduc la reprezentările din fig. 3, a) şi b) pentru vectorul diferenţă.

Fig3



Totuşi, în practică, se preferă folosirea reprezentării lui - ca în fig. 3, c), adică cealaltă diagonală a paralelogramului în care am figurat suma + . Evident că această reprezentare este posibilă .

Adica fie şi atunci - = - = unde reprezinta cealalta diagonala a parelelogramului ABCD.

<u>Inmultirea cu un nr real</u>

Fie λ un număr real diferit de zero şi un vector Prin definiţie, este un vector , numit produsul lui λ cu , care are aceeaşi direcţie cu , acelaşi sens cu pentru >0 şi sens contrar lui pentru < 0, iar mărimea sa este | | înmulţit cu lungimea lui .

Constatăm că această definiţie nu utilizează reprezentanţi ai vectorilor în cauză. Totuşi, considerarea lor într-un desen poate contribui la fixarea definiţiei.

Din nou este de preferat ca ordinea în care se dau proprietăţile esenţiale ale operaţiei de înmulţire a unui vector cu un nou număr real săfie cea folosită în definiţia spaţiului liniar (vectorial) abstract:

1. λ·(+)=λ +λ ;
2. (λ +μ)· = λ+μ;
3. (λ·μ)· = λ·(μ·);
4. 1· = .

oricare ar fi vectorii, şi numerele reale μ, λ.

Numerele reale caracterizează mărimile numite scalare. Din acest motiv ele însele se numesc uneori scalari şi se vorbeşte de înmulţirea unui vector cu un scalar.

Aplicatii :

1. Se dă triunghiul ABC înscris într-un cerc de centru O. Punctele E,F,G sunt mijloacele razelor OA, OB, respectiv OC. M este un punct oareca re in planul triunghiului , iar H, I, J sunt simetricele punctului M in raport cu E, F respective G. Aratati ca ΔABC≡ΔHIJ.

Rezolvare:

= +=+=2(+)=2=2(+) =+=

= +=+=2(+)=2=2(+)=

+=

= +=+=2(+)=2=2(+)=

+=

ΔABC≡ΔHIJ.

2. Daca ABCD este patrat , iar ABE, respectiv BCF sunt triunghiuri echilaterale astfel incat EInt(ABCD), FExt(ABCD), aratati ca punctele D, E, F sunt coliniare.

Rezolvare :

Fie a lungimea patratului ABCD.Consideram un sistem de coordinate cu originea in A, cu axele (AB respectiv (AD.

Atunci D(0; a) , E(;) si F(;)

=-(;) si

=- (;)

Pentru ca coordonatele vectorilor si sunt proportionale rezulta D, E, F coliniare.

Aplicatii propuse:

1. In triunghiul ABC notam H ortocentrul tringhiului si cu O central cercului circumscris triunghiului. Atunci:

a) =+

b) =++

c) ++=2

2. Fie ABCDEF un hexagon regulat si o central hexagonului. Consideram punctele M si N apartinind segmentelor () respectiv () astfel incat = si

a) Sa se arate ca =+ si =2+

b) Sa se determine p astfel incat B, M, N sa fie coliniare

Bibliografie:

1. I.D.ALBU , Geometrie, Concepte si metode de studiu. Partea I. Constructia axiomatic a geometriei euclidiene, Editura Mirton , Timisoara, 1998
2. I.D.ALBU, Geometrie, Concepte si metode de studiu. Partea I. Metode algebrice in geometria euclidiena, Editura Timpul , Resita, 2000
3. Manuale de geometrie, editiile 1989-1995
4. Revista TMMate , 2007

Matematici financiare

Prof. Dragomir Liliana

Operatiunile financiare reprezinta modalitati de plasare a unor sume de bani, in conditii stabilite si cu un anumit scop, de catre un partener P1 catre un alt partener P2. Partenerii P1,P2 pot fi persoane, grupuri de persoane sau institutii. De obicei cel care face plasamentul (are banii) stabileste conditiile operatiunii financiare respective.

Plasamentul unei sume de bani consta in urmatoarele:

a) cel ce dispune de bani este privat temporar de o anumita suma de bani; in consecinta primeste o renumeratie pentru aceasta privatiune;

b) cel ce nu dispune de bani foloseste temporar o anumita suma de bani provenita de la altcineva, contra unei taxe.

Rezulta ca intotdeauna exista un cost al operatiunilor financiare,care reprezinta efortul financiar pe care il suporta un partener pentru a putea beneficia de o anumita suma de bani pe care o are un alt partener. Cel mai frecvent, un asemenea cost este asimilat cu dobanda aferenta plasamentului financiar, desi – in realitate – dobanda este numai una dintre componentele costului unei operatiuni finaciare. Desi foarte diverse, operatiunile financiare au in comun anumite concepte economice cu ajutorul carora se constituie modele matematice specifice. Aceste modele reprezinta fundamentul matematicilor financiare.

Teoria generala a matematicilor financiare are ca obiect constituirea si analiza, in termini matematici, a modelelor economice ale operatiunilor financiare prin care se fac plasamente ale unor sume de bani.

Conceptul de dobanda

Sa presupunem ca partenerul P1 dispune de o suma de bani S0 pe care o plaseaza partenerului P2 pentru o perioada de timp t, in conditii prestabilite. La finele perioadei de timp t partenerul P1 primeste suma finala S(S0,t) > S0.

Diferenta D(S0,t) = S(S0,t)-S0 se numeste dobanda corespunzatoare plasarii sumei S0 pe perioada de timp t. Daca t = 1an si S0 = 100 unitati monetare (u.m.), dobanda corespunzatoare se numeste procent. Se noteaza cu p; p = D(100,1).

Daca t = 1an si S0 = 1u.m., dobanda corespunzatoare se numeste dobanda unitara anuala. Se noteaza cu i; i=D(1; 1)=

Constanta u = 1 + i se numeste factor de fructificare anuala; u^{-1} se numeste factor de actualizare anuala.

Dobanzile se clasifica in:

a) Dobanzi simple

Plasarea sumei S0 se efectueaza in regim de dobanda simpla daca pe toata perioada de plasare t suma initiala S0 nu se modifica.

Dobanda simpla este:

$$D(S_0, t)=S_0\cdot\cdot t$$

t – perioada de timp exprimata in ani (numar intreg sau fractionar)

$$\text{sau } D(S_0 , t) =S_0\cdot i\cdot t$$

Suma finala este $S(S_0 , t)=S_0+ D(S_0 , t)$ sau $S(S_0 , t)=S_0(1+i\cdot t)$

Procentul mediu de plasament.

Se plaseaza sumele Sk, cu scadentele tk si procentul pk, k = 1,n , in regim de dobanda simpla.

Se numeste procent mediu de plasament procentul p cu care trebuie plasata fiecare suma Sk cu scadentele tk, astfel incat dobanda totala sa nu se modifice.

=p

P=

Exemple :

1.Suma de 1000 u.m. este imprumutata in regim de dobanda simpla, astfel : 2 ani cu procentul de 10%, 3 luni cu 15%, 9 zile cu 20%. Sa se afle dobanda aferenta si suma finala.

Rezolvare :

3 luni = 3 : 12 = 0,25 ani; 9 zile = 9 : 360 = 0,025 ani

D = 1000 ·(0,1· 2 + 0,15· 0,25 + 0,2 ·0,025) = 242,5 u.m.

S = 1000 + 242,5 = 1242,5 u.m.

Se plaseaza 300000 u.m. timp de 30 de zile cu p=9%,200000 u.m. timp de 72 de zile cu p=15% si 1500000 u.m. timp de 4 luni cu 12%.Care este procentul mediu al celor trei plasamente ?

Rezolvare :

p=(300000 ·9 ·30 :360 +200000 ·15 ·72 :360 +1500000·12·4 :12) : (300000 ·30 :360 +200000 ·72 :360 +1500000 · 4 :12)=12,08%

b) Dobanzi compuse

Daca valoarea sumei S0 se modifica periodic pe intervalul de timp de lungime t, dupa criterii prestabilite, iar intre doua modificari consecutive sumei modificate i se calculeaza o dobanda simpla, atunci spunem ca plasamentul sumei initiale S0 s-a efectuat in regim de dobanda compusa.

Daca dobanda compusa este calculata anual, pentru n ani, rezulta formulele de calcul:

$$S(S_0 , t)= S_0(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots\ldots(1+i_n)$$

$$D(S_0 , t)= S_0[(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots\ldots(1+i_n)-1]$$

In cazul in care i=constant dobanda compusa se calculeaza astfel:

$$S(S_0 , t)= S_0(1+i)^n$$

$$D(S_0 , t)= S_0[(1+i)^n-1]$$

Daca dobanda compusa se calculeaza dupa perioada ani , dupa t=1 an rezulta:

$$S(S_0 , t)= S_0(1+i)^m$$

cazul in care i=constant in decursul anului

Pentru a afla valoarea reala a dobanzii unitare anuale scriem egalitatea:

$S_0(1+i_{real})=S_0(1+i)^m$ de unde rezulta $i_{real}=(1+i)^m-1$

Procentul annual nominal este p=100i ,procentul annual real este $p_{real}=100i_{real}$

Exemple :

1. In urma cu 2 ani si 3 luni o persoana a imprumutat o suma de 1000 u.m. in regim de dobanda compusa calculata anual. Stiind ca in cei trei ani, procentele anuale au fost de 15%, 17% respectiv 20%, ce suma trebuie sa plateasca acum persoana si care a fost dobanda aferenta.

Rezolvare:

3 luni = 3 : 12 = 0,25 ani

S = 1000 · (1 + 0,15) · (1 + 0,17) · (1 + 0,2 · 0,25) = 1000 · 1,15 · 1,17 · 1,05 = 1412,78 u.m.

D = 1412,78 – 1000 = 412,78 u.m.

2. In regim de dobanda compusa calculata trimestrial, cu p=10% ,a fost plasata o suma de 1000 u.m. in urma cu 7 luni.De ce capital se dispune in prezent?

Rezolvare :

S=1000 · (1+0,1 · 3 :12) · (1+0,1 · 3 :12) · (1+0,1 · 1 : 12) = 1059 u.m.

Concluzii:

Presupunand ca suma S0 este plasata pe durata t cu procentul anual 100i si notand cu DS =DS(S0,t), DC = DC(S0,t) dobanda simpla, respectiv dobanda compusa corespunzatoare, au loc

relatiile:

$D_s=S_0\cdot i\cdot t$

$D_c=S_0[(1+i)^n-1]$

Rezulta:

a) daca t < 1 an, atunci $D_S > D_€$;

b) daca t = 1 an, atunci $D_S = D_C$;

c) daca t > 1 an, atunci $D_S < D_C$.

Rezulta ca, daca nu se precizeaza tipul dobanzii cu care se efectueaza plasamentul, pe termen scurt (t < 1 an) se va calcula dobanda simpla, iar pentru durate mai mari de 1 an se va calcula dobanda compusa calculata anual.

Rambursarea imprumuturilor

Imprumutul este operatiunea financiara prin care un partener P1 plaseaza o suma de bani, pe o perioada de timp determinata si in conditii prestabilite, unui alt partener P2, care are nevoie de aceasta suma. Partenerul

P1 se numeste creditor iar partenerul P2 se numeste debitor.

Operatiunea financiara prin care P2 plateste lui P1 suma de care a beneficiat se numeste rambursare sau amortizare a imprumutului.

Imprumutul este o operatiune financiara cu doua componente:
- creditare;
- rambursare (amortizare).

Aceste componente reprezinta operatiuni de plati esalonate.

Rambursarea (amortizarea) unui imprumut consta din plata la intervale de timp egale sau nu,a unor sume egale sau nu, la care se adauga dobanda corespunzatoare partii din datorie neachitata la inceputul perioadei in care se face plata, calculata cu procente egale sau nu de la o perioada de timp la alta.

Notam:

- V_0 – valoarea imprumutului (sau datoriei) la momentul in care incepe rambursarea;
- t – perioada de timp in care se face rambursarea;
- t_k – perioada de timp dintre doua plati consecutive; t=
- Q_k , k =1,n- partea din valoarea V_0 a imprumutului care se plateste la un anumit

moment din intervalul de timp t_k, numita amortisment;

- i_k, k = 1, n - dobanda unitara anuala corespunzatoare perioadei de timp t_k;
- d_k, k = 1, n - dobanda totala corespunzatoare partii din datorie neachitata la inceputul

perioadei t_k;

- S_k, k = 1, n - suma efectiva platita in perioada t_k (rata corespunzatoare perioadei t_k),

$S_k = Q_k + d_k$;

- V_k, k = 1, n - valoarea datoriei ramase dupa achitarea amortismentului Q_k;
- R_k, k = 1, n - valoarea datoriei rambursate dupa achitarea amortismentului Q_k

Au loc relatiile:

$$V_0=$$
$$V_k=V_0-$$
$$R_k=$$

Rezulta ca $V_k + R_k = V_0$, egalitate ce reprezinta, la un moment dat al rambursarii, "ecuatia de echilibru" dintre partea de datorie neachitata (ramasa) si cea rambursata (amortizata).

Bibliografie:

1. Aneta Muja , Matematica pentru economisti, Ed.Victor,Hyperion,Bucuresti,1999,pag.338-433.
2. I.Purcaru s.a, Matematici financiare si decizii în afaceri, Ed. economica,1996.
3. V.Cenusa s.a., Matematici aplicate în economie, E.D.P.,1990.
4. Colectiv de autori , Manual de matematica clasa aX-a , Editura Sigma 2000

Aplicaţie a inelului unitar

Prof. Simona Bejan

Grup Şcolar Romulus Paraschivoiu Lovrin

Matematica, ştiinta cu caracter abstract si deschis a patruns in toate compartimentele vieţii în scopul educarii gândirii creatoare, iar studiul ei nu se poate incheia la nici un nivel. De aceea orice individ al societatii trebuie educat sa cunoasca matematica. Dar de cata matematica are nevoie fiecare? Raspunsul nu este simplu, exista ideea ca în scoală, la diferite niveluri, se prezinta:

-o matematica folosita în practica de zi cu zi,

-o matematica necesara deciziei ce se ia in viata,

-o matematica studiata în profunzime,

-si evident , exista o matematica "creata" , pe care o fac cercetatorii.

In studiul matematicii în scoala ,un rol important il are profesorul de la clasa. Acesta, pe langă cunoştiinţele solide de matematica si psihopedagogie care trebuie sa le aibe, trebuie să stimuleze activitatea elevilor săi prin competivitatea problemelor propuse,revistelor şi culegerilor indicate.

Nevoile educaţionale , culturale şi ştiinţifice ale actualelor generaţii de elevi , deschiderea spre Comunitatea Europeană , preocupările matematice comune elev – profesor puse în valoare cu ocazia desfăşurării diferitelor activităţi ştinţiifice au impulsionat alegerea acestui subiect. Noile orientări în predarea matematicii urmăresc o abordare mult mai complexă a participării elevilor şi profesorilor la o mai bună înţelegere şi aprofundare a conţinuturilor , cât şi dezvoltarea abilităţilor şi capacităţii de transfer în alte domenii şi în viaţa practică .

Materialul de faţă se adreseaza profesorilor ce se pregatesc pentru sustinerea definitivatului , a gradelor didactice, diferite concursuri de matematica în invatamant, dar poate fi folosit şi în activitatea la clasa. Subiectul descris este partea algebrică, a variantei III, Examenul de grad didactic II, sesiunea august 2009, pentru care am elaborate o parte a rezolvarii,definiţii utile şi observaţii.

Subiectul I-Examenul de grad didactic II, sesiunea august 2009, Timiş

Pentru m,n R se considera polinomul P(m,n)=mX+n si multimea I={P(m,n):m,nR},pe care se definesc operatia de adunare uzuala a polinoamelor si legea de compozitie "*" definita prin P_1*P_2=restul impartirii lui P_1P_2 la x-1.

1.)Sa se arate ca (I,+,*) este un inel comutativ cu unitate si cu divizori ai lui zero.

2.) Sa se determine elementele inversabile ale acestui inel.

Definitii utilizate:

a. Se numeşte inel unitar un triplet (R,+,·), unde R este o multime nevida, iar "+", "·" sunt doua operatii pe R, numite adunarea şi înmultirea pentru care:
   (R,+) este grup abelian,
   (R,·) este monoid,
   Inmultirea este distributivă fata de adunare,
   Daca in plus inmultirea pe R este comutativă, atunci inelul este comutativ.
b. Inelul (R,+,·) are divizori ai lui zero daca R contine cel putin un divizor al lui zero.
   Un inel care nu are divizori ai lui zero, comutativ, se numeste inel integru sau domeniu de integritate.
c. Se numeste element inversabil intr-un inel R, orice element u care apartine lui R , pentru care exista vR astfel incat uv=1. Elementele inversabile ale unui inel R se numesc unitati ale lui R. Se pot nota cu U(R).

În rezolvarea subiectului m-am referit doar la divizorii inelului şi determinarea elementelor inversabile ale inelului:

1.) Fie $P_1=P(m_1,n_1)=m_1x+n_1$

$P_2=P(m_2,n_2)=m_2x+n_2$ m_1,n_1, m_2,n_2R

$P_1P_2= m_1m_2x^2+(m_1n_2+ m_2m_1)x+ n_1n_2$ impartim la x^2-1 si obtinem restul

$R(x)= P_1*P_2= (m_1n_2+ m_2m_1)x+ m_1m_2+ n_1n_2=P(m_1n_2+ m_2n_1, m_1m_2+ n_1n_2)$

➔P_1*P_2I ➔"*" este lege de compozitie interna pe I.

Se verifica axiomele inelului:

(I,+) este grup abelian aditiv (fata de operatia de adunare a polinoamelor),

(I,*) este monoid multiplicativ ,

Observam ca P_0 =P(0,1) verifica P_0*P(m,n)=P(m,n)* P_0=P(m,n),m,nR ➔P_0I , P_0 este elementul neutru(unitar) relationat la legea "*".

Analog se verifica distributivitatea celei de-a doua legi fata de prima.

(I,+,*) inel comutativ unitar

Observam ca :

P_1=P(1,1)=x+1 si P_2=P(1,-1)=x-1 P_1 ,$P_2$0=P(0 ,0) si verifica

P_1 *P_2=P(0,0)=0,

Deci P_1 si P_2 sunt divizori ai lui zero➔(I,+,*) este un inel cu divizori ai lui zero.

2.) Pentru P(m,n) I, P0, cautam S(s,p)I, S0 cu P*S= P_0=P(0,1)

P(mp+sn, ms+np)=P(0,1)

mp+sn=0 (1) si ms+np=1 (2),

Prin rezolvarea sistemului format de cele doua ecuatii determinam s,p in functie de m,n,

Cazul m=0 ➔s=0➔p=1/n, daca n0,

Deci P(0,n) cu n0 este inversabil şi inversul sau este P(0,1/n).

Cazul m0➔s0 p=-(sn)/m

➔s=(1-np)/m=(m+sn^2)/m^2 ➔s=m/m^2 -n^2 R, daca m +n, m -n

Deci P(m,n) cu m0 si m +n, m -n este inversabil si inversul sau este

P(m/ m^2 -n^2 ,p) =P(m/ m^2 -n^2 , n/ n^2 -m^2), deoarece p=-n/m·m/ (m^2-n^2)= n/ n^2 -m^2.

Observaţii:

1. Într-un inel nu se poate face operatia inversa inmulţirii.
2. În orice inel elementul neutru faţă de adunare este element singular faţă de inmultire.

Educaţia permanentă

Prof. BEJAN SIMONA
Grup Şcolar „Romulus Paraschivoiu" Lovrin

Conceptul de educatie permanentă e specific pedagogiei contemporane.

Educaţia nu trebuie sa se rezume la ceea ce ofera şcoala, ea trebuie să continue şi dupa absolvirea şcolii, trebuie sa continue toata viaţa.

O caracteristică majoră a educaţiei contemporane este evoluţia ei pe principiul educaţiei permanente.

Educaţia permaneta apare ca un concept integrator, ce înglobează toate dimensiunile actului educativ,

- atât în temporal (toată durata vieţii)
- cât şi în plan spaţial, articulând toate influenţele educaţionale exercitate într-o organizare formală, non-formală sau informală.

Educaţia permanentă este o responsabilitate a persoanelor, grupurilor, organizaţiilor şi instituţiilor şi este stimulată de către stat.

Contribuţii importante se înregistrează, în planul educaţiei permanente, şi în ceea ce priveşte metodele şi tehnicile de instruire-educaţie :

discuţia în grup; studiul de caz; jocul de rol, învăţarea prin cercetare, brainstormingul etc.

Factorii educatiei permanente sunt :

1. Factori institutionali scolari
2. Factori institutionali peri si extrascolari -mass-media :
3. Factori generali

Forme de educatie permanenta

- organizate de scoala (care pregatesc pentru educatie permanenta)
- organizate de sistemul de educatie permanenta
- forme libere, spontane.

Finalităţile principale ale educaţiei permanente vizează dezvoltarea plenară a persoanei şi dezvoltarea sustenabilă a societăţii.

Educaţia permanentă se centrează pe formarea şi dezvoltarea competenţelor cheie, a competenţelor specifice şi a competenţelor avansate, necesare într-o economie a cunoaşterii şi o societate democratică.

Perceputa si conceputa ca însotitor permanent, ca înger pazitor pentru omenescul din societate si din fiecate ins, educatia releva perspective noi, chiar surprinzatoare, asupra durabilului si a episodicului din toti si din fiecare. Acelasi peisaj ofera imagini si date diferite si noi, dupa cum e fotografiat la lumina zilei sau în infrarosu.

Procesul rapid al schimbărilor din societatea contemporană impune abordarea educaţiei şi autoeducaţiei şi din perspectiva exigenţelor viitorului. Teoreticienii educaţiei insistă asupra tezei, conform căreia şcoala trebuie să-şi modifice perspectiva despre propria ei activitate educativă şi să se adapteze cerinţelor viitorului, astfel încât să-l pregătească pe elev spre a avea o concepţie adecvată faţă de autoeducaţie şi autoînvaţare.Deasemenea, elevul trebuie să înveţe cum să înveţe şi să devină, într-o lume care se află în continuă devenire. Este necesară adaptarea educaţiei la cerinţele pieţei muncii prin deschiderea educaţiei tradiţionale (predominant formale) la diversele influenţe educative din afara acestui cadru şi, totodată, transferarea spiritului acestei educaţii în alte arii educaţionale. Desigur, este vorba în primul rând de calitatea umana a majoritatii membrilor unei societati. Aceasta calitate exista, potential, în orice colt al lumii; dar ceea ce o face reala nu este neaparat abundenta materiala, ci patosul educativ al valorificarii ei. Din scoli bine dotate pot iesi absolventi blazati, ratati sau inapti, dupa cum la noi, altadata, s-au plamadit savanti si artisti de mare aport creator din scoli mizere, de la lumina opaitului si de pe ceasloave cu file patate de ceara sau de muste strivite. Educatia este compatibila si cu prosperitatea, si cu luxul, dar si cu frugalitatea si cu modestia mijloacelor. Totul este ca ea sa fie o prezenta, o necesitate si o vointa - indispensabile si continue

În concluzie, în epoca noastră există două principii fundamentale care sprijină eforturile factorilor care urmăresc sporirea coerenţei şi eficienţei procesului instructiv-educativ: principiul educaţiei permanente şi principiul orientării prospective a educaţiei. Ele pot contribui cu succes la sporirea eficienţei activităţii didactice corelate cu celelalte tipuri de învăţare, sporind astfel acţiunile şi influenţele exercitate asupra elevilor.

Bibliografie:

1. Bogdan Bălan, Stefan Boncu, Andrei Cosmovici, Teodor Cozma, Constantin Cucoş, Carmen Creţu, Ion Dafinoiu, Luminiţa Iacob, Constantin Moise, Mariana Momanu, Adrian Neculau, Tiberiu Rudica - Psihopedagogie- ed.Polirom, Bucureşti, 2005;
2. Dr. Tiberiu POPESCU Permanenta educatiei permanente Universitatea "Al. I. Cuza" - Iasi

ADAPTAREA COPILULUI REBEL ÎN ŞCOALĂ ŞI SOCIETATE

Prof. Simona Bejan
Grup Şcolar Romulus Paraschivoiu Lovrin

La jumătatea secolului XX, psihiatrul american Eric Berne (1910-1970) a „inventat” şi răspândit în lume o teoriealternativă la psihologia tradiţională.Spre a fi accesibilă oamenilor obişnuiţi a folosit un limbaj simplu, fără cuvintesavante. Atenţie! Ca şi apele liniştite, cuvintele simple poartă înţelesuri adânci, incredibil de subtile.Analiza Tranzacţională (AT) este o teorie a personalităţii umane şi un sistem psihoterapeutic dedicat dezvoltării şischimbării personale (definiţia ITAA -International Transactional Analysis Association, fondată în 1965).În ultimele decenii, a evoluat spectaculos oferind instrumente puternice în psihoterapie, dezvoltare personală,educaţie, consiliere şi training în management, marketing, vânzări, negocieri şi comunicare în organizaţii.Într-o manieră pragmatică, AT dezvoltă capacitatea intelectuală şi emoţională a omului de a se înţelege pe sine, peceilalţi şi a comunica persuasiv.

Încă de la prima suflare, starea Copil este prezentă prin informaţia genetică şi impulsurile atavice de satisfacere anevoilor şi dorinţelor. Preexistă celorlalte stări ale eului şi trăieşte până în clipa finală. Starea Copil comportă douădiviziuni fundamentale: Copil Liber şi Copil Adaptat. Prima surprinde starea naturală a copilului „sălbatic”, iar a douastarea socializată a copilului „îmblânzit”. Majoritatea analiştilor consideră patru ipostaze: Copil Liber, Copil Adaptat,Copil Rebel, Copil Obedient. Uneori, acestora li se adaugă ipostaza de Copil Creativ sau „Micul Profesor”.

Majoritatea terapeuţilor consideră starea Copil Rebel ca pe un revers al adaptării. Alţii, precum André Moreau, depildă, o consideră ca fiind un exces de Copil Liber. Se pare că au dreptate şi unii şi alţii.În orice caz, starea Copil Rebel este aspectul negativ al expresiei infantile, care manifestă revolta ca reacţia la autoritatea parentală. Reacţionează într-un mod interzis, şocant, obraznic, ofensator. Pentru a atrage atenţia şi a ieşidin anonimat, Copil Rebel provoacă pe ceilalţi să-l „atace”.Multe persoane în CR sunt violente şi grosolane, pentru a obţine măcar o recunoaştere negativă. Autismul este orebeliune absolută, în care subiectul refuză contactul cu mediul său şi rămâne cantonat în propriul univers. Persoanaîn CR contestă, provoacă şi se plasează în opoziţie cu autorităţile parentale, cu instituţiile, interdicţiile şi obligaţiile.Afişează ostentaţie, violenţă şi atitudini distructive. Acuză, se înfurie şi refuză orice influenţă şi interdicţie. Comunică sec, tăios şi ostil. Cum ne putem da seama că cineva se află în starea CR?Gestica şi mimica: mişcări repezite; gesturi agresive; strânge pumnii; arată cu degetul; bate din picior; invadeazăzona intimă; acroşează violent; scrâşneşte din dinţi; zâmbeşte răutăcios; privire obraznică, arogantă, sfidătoare.Vocea:energică, răzbunătoare, arţăgoasă, stridentă, grosolană, cu debit verbal rapid şi semnale de panică.Expresii verbale: Nu vreau. De ce eu? De ce nu eu? N-aveţi dreptul să... Sunteţi nebuni? Nu mă poate oblige nimeni... Încetaţi o dată cu chestiile astea! Hai s-o văd şi pe asta!Monologuri interioare: „N-au dreptul să... E un abuz! O să vă arăt eu! Nu vă las eu să...".E „greu de trăit" cu CR. Revolta sistematică oboseşte, iar dispreţul pentru autoritate, morală şi lege devine primejdios. Totuşi, folosită moderat, starea CR protejează alte stări ale eului Copil şi eliberează surplusul de energie.

Vorbind despre starile Adult, Copil si Parinte in diversele lor forme, se spune ca acestea simbolizeaza, respectiv, comportamentul nostru rational (Adult), cel emotiv infantil (Copil) si acela care reflecta modelele de comportament si de autoritate ale parintilor nostri (Parinte). Important este sa ne fixăm in minte ca orice stare este utilă si că are functiunea sa, daca este folosita intr-un moment oportun. Aceasta inseamna, de exemplu, ca oricine se gaseste intr-o pozitie cu autoritate (manager, educator, judecator) va face uz deseori de starea de Parinte Normativ; cel care are in schimb o activitate creativa va utiliza mai des starea Copil, ceea ce nu va face, sa zicem, un inginer, care se va indrepta cu predilectie catre starea Adult.

Învăţându-ne copiii cum să conştientizeze aceste stări astfel încât să dea răspunsul cel mai potrivit în fiecare situaţie diferită în care se găsesc şi văzându-ne pe noi accesându-le în mod echilibrat şi adecvat, copiii noştri au şanse mult mai mari să se dezvolte armonios şi să se adapteze cu succes oricăror evenimente ulterioare.

Energiile sale trebuie bine stapanite pentru ca pot duce la actiuni excesive, iar emotiile sale sunt puternice si psihicul sau este mereu "cu garda sus". Astfel, va va fi dificil sa-l faceti sa se razgandeasca asupra unor actiuni care pentru el reprezinta "pigmentul" care-i coloreaza viata. Rebel si individualist, cele mai bune lectii pe care i le poate da viata provin in principal din experientele personale. Flerul si spiritul de analiza care caracterizeaza acest copil il conduc intodeauna dincolo de aparente, dincolo de ceea ce se vede, facand din el un om determinat, fascinant si atasant.

Dotat cu o vitalitate remarcabila, accepta conditii care pot face dovada psihicului si mentalului sau remarcabile. Aspira in egala masura la o siguranta materiala si fizica in scopul de a-si echilibra emotiile complexe si care pot uneori sa-l destabilizeze. Copilul investeste mult in actiunile sale si nu se va abate din drum chiar daca acest lucru pare imposibil. Putin misterios, solitar si inainte de orice pasional, el cerceteaza si sondeaza intr-una pentru a-si satisface setea de cunoastere. Perspicacitatea si judecata patrunzatoare contribuie fara indoiala la expresia creatoare a puterii sale conferind personalitatii sale o aura de mister.

Este capacitatea fiinţei umane de a-şi da seama de experienţa sa şi de a o transforma, valorifica astfel încât să fie în folosul său. Dacă individul îşi dă seama de datele experienţei sale, el va putea să le supună unui proces - implicit sau explicit - de evaluare, de verificare şi, la nevoie, de corecţie. Atunci, ţinând cont de varietatea nevoilor sale, el va încerca să le satisfacă pe toate, armonizând cât mai bine posibil experienţa sa cu comportamentul său; va rezulta de aici, deci, un anumit echilibru.

Consilierea psihopedagogica reprezinta un proces de acordare a asistentei psihopedagogica persoanelor care se confrunta cu anumite dificultati in relatiile cu ceilalti, cu sine sau in activitatea pe care o desfasoara. Pe de alta parte, profesorul acorda suportul necesar persoanelor care nu se confrunta cu nici o dificultate in momentul prezent, dar doresc sa valorifice la maxim potentialul si resursele personale sau ale copilului prin gasirea solutiilor alternative.

Un alt aspect important pe care vreau sa il mentionez este cel al numarului de ore pe care un parinte il petrece alaturi de copil. Parintii afirma ca stau, in general, intre patru si sapte ore cu copilul.

Important pentru copil nu este numai numarul de ore in care parintii se afla in acelasi spatiu cu el ,ci modul in care membrii familiei interactioneaza cu el. Copilul are nevoie de atentia si compania persoanelor semnificative pentru el, de interactiune autentica, simpla prezenta a parintilor nefiind de ajuns.

De asemenea, pe langa atentia acordata de parinti copiilor, este important ca copiii sa frecventeze şcoala, pentru ca acolo este locul in care copiii primesc educatie sociala, le este sprijinita dezvoltarea fizica, morala si intelectuala, le sunt dezvoltate abilitatile de limbaj.

Pentru copiii care traiesc intr-un mediu cu carente, carora le este greu sa isi faca prieteni, sa se exprime, şcoala este foarte importanta. Unele studii indica faptul ca, cu cat numarul anilor petrecuti intr-o colectivitate este mai mare, cu atat copilul risca mai putin sa repete o clasa in cursul ciclului primar.

Problemele de disciplina pot deveni teatrul unor desfasurari de forte disproportionate intre cadru didactic si copil. Disciplinarea inseamna mai intai de toate formarea, educarea, instruirea, mustrarea, corectarea si indreptarea unor comportamente prin invatarea copilului pe ce cale sa mearga prin iubire si convingere, nu din teama si de durere, trebuie sa punem accent pe rabdare, sinceritate, încredere, apropiere.

Disciplinarea inseamna coerenta si constanta in ceea ce i se cere copilului, nu cicaleala si autoritate exagerata; inseamna afectiune si corectitudine, iar mesajul transmis copilului nu este constrangerea de a deveni perfect pentru a merita vreo rasplata.

Avand in vedere acest aspect , consider ca in timp vor aparea o serie de schimbari pozitive atat in educatia copiilor, cat si in deschiderea parintilor catre cautarea de informatii si de sprijin in eforturile dumnealor.

Bibliografie:
Irwin, E, Play, Fantasy and Symbols: Drama with Emotionally Disturbed Children, în Schater, G., Courtney, R., Drama in Therapy, Volume I: Children, Drama Book Specialists (Publishers), New York, 1981, p.113;
Irwin, E; Rubin, J.; Shapira

Calcul integral implementat in matematica

Prof. Simona- Ecaterina Bejan
Grup Şcolar " Romulus Paraschivoiu" Lovrin

Argument

Lucrarea de faţa prezinta o modalitate de rezolvare si interpretare a unor probleme ce apar in stiinta si tehnica. Modulele soft pentru prelucrari matematice au fost realizate inca din anii 1960 cand calculatoarele au inceput sa devina un instrument in rezolvarea problemelor tehnice si stiintifice Aceastea erau insa dedicate unui anumit tip de probleme si erau grupate in biblioteci de unde erau apelate de catre programe scrise in limbaje de uz general. Adesea setul de parametri ai acestor module era mare iar utilizatorul trebuia sa cunoasca cel putin cateva dintre detaliile de realizare a modulului. Sistemele integrate, care permit abordarea unei palete largi de calcule au aparut in anii 1980 o data cu dezvoltarea puterii de calcul si evolutia conceptelor de programare. Oferind adesea o interfata usor de utilizat, aceste sisteme permit utilizatorului sa se concentreze mai mult asupra problemei si mai putin asupra metodelor matematice de rezolvare a acesteia. Exista o gama larga de utilizari: operează calcul simbolic complex care adesea implică sute de mii şi milioane de termini, rezolvare de ecuaţii, ecuaţii diferenţiale,calcul integral si diferential,grafice minimizarea problemelor în mod numeric sau simbolic Modelare numerică şi simulare, de la sisteme simple de control până la coliziuni intergalactice, derivative financiare, sisteme biologice complexe, reacţii chimice, studii de impact pentru mediul înconjurător sau câmpuri magnetice în acceleratoarele de particule .

Facilitează dezvoltarea rapidă de aplicaţii pentru companiile de inginerie sau instituţiile financiare. Produce la o calitate profesională rapoarte tehnice interactive sau documente pentru distribuire electronică sau în format tipărit . Ilustrează concepte matematice sau ştiinţifice pentru studenţi si elevi, de la admitere şi până la nivel postuniversitar. Pune în pagină orice fel de informaţie tehnică - de exemplu prezentare de patente şi invenţii. Produce prezentări tehnice şi materiale pentru seminarii tehnice si se poate folosi ca metoda de predare-invatare.

Cuprins:

Prin sistem de software matematic (prescurtat SSM) vom intelege un astfel de sistem integrat. Un SSM este de regula constituit din trei componente:
- nucleu. Contine functiile de baza (care se apeleaza prin intermediul unui limbaj de comanda specific). -subsistem de interfata. Permite transmiterea de comenzi sistemului si furnizarea rezultatelor. Interfata poate fi de tip text (sistemul lucreaza ca un interpretor) sau grafica (bazata pe documente de lucru). In cazul interfetei tip text comenzile sunt preluate si executate secvential fiind dificila revenirea la o comanda anterioara. In cazul interfetei grafice dialogul cu utilizatorul se realizeaza prin intermediul uneia sau mai multor ferestre. Fiecare corespunde unui document care contine comenzi, raspunsuri sau texte descriptive introduse de catre utilizator. Comenzile pot fi evaluate in ordinea aleasa de catre utilizator. Anumite sisteme se bazeaza pe utilizarea unui limbaj de comanda (care poate fi vazut ca un limbaj de programare) pe cand altele permit rezolvarea problemei prin selectarea unor functii dintr-un sistem de meniuri.

Ansamblu optional de pachete contine functii suplimentare celor de baza destinate problemelor specifice unui anumit domeniu. Pentru a utiliza functiile din cadrul lor, pachetele trebuie incarcate explicit. Posibilitatea de a adauga pachete de noi functii ofera exibilitate acestor sisteme.

Principalele tipuri de prelucrari efectuate de catre un SSM sunt grupate in date simbolice,numerice si grafice.

Sistemele de software matematic ofera posibilitatea efectuarii fiecareia dintre aceste prelucrari. Unele prelucrari pot fi efectuate direct existand comenzi specifice iar altele pot fi descrise in limbajul de programare specific sistemului. Spre deosebire de limbajele de programare de uz general sistemele de software matematic contin un limbaj de comanda mult mai bogat in sensul ca pot fi specificate printr-o singura comanda si prelucrari bazate pe algoritmi relativ complicati (de exemplu inversarea unei matrici, rezolvarea simbolica sau numerica a unui sistem de ecuatii diferentiale etc).

Etapele parcurse in rezolvarea unei probleme specifice unui anumit domeniu sunt:
(a) Enuntarea problemei. Este realizata de catre un expert uman al domeniului respectiv. Corespunde stabilirii datelor de intrare si a scopului urmarit.
(b) Formalizarea problemei. Este realizata de catre un expert uman al domeniului respectiv eventual in colaborare cu un matematician.Rezultatul acestei etape este un model matematic mai simplu sau mai complex care poate contine: formule, functii, sisteme de ecuatii/inecuatii etc.
(c) Rezolvarea problemelor matematice ce intervin in model. Aceasta este etapa in care poate interveni un sistem de software matematic. Rezultatul va fi un obiect matematic (numar,expresie, multime, functie, vector, matrice, grafic etc.)
(d) Interpretarea rezultatului. Este realizata de catre un expert uman al domeniului. Rezultatul este un raspuns la problema enuntata ,folosind termeni specifici domeniului din care a provenit problema.

Un SSM are urmatoarele caracteristici care îl diferentiaza de alte sisteme de programare:

1. Implementarea obiectelor matematice. Majoritatea obiectelor cu care se opereaza în matematica (multimi, vectori, matrici, functii, operatori, ecuatii etc) sunt implementate prin tipuri sau obiecte proprii.
2. Implementarea prelucrarilor matematice. O serie de prelucrari asupra obiectelor matematice
(calculul limitelor, al derivatelor, al integralelor, rezolvarea ecuatiilor, reprezentari grafice) sunt implementate pentru a fi apelate prin intermediul unei singure comenzi.
3. Limbaj avansat de descriere a problemelor. Sistemele de software matematic ofera un limbaj propriu de descriere a problemelor si modelelor matematice complexe.
4. Interfata cu utilizatorul. Sistemele actuale poseda interfete grafice care permit introducerea si obtinerea formulelor matematice în forma clasica folosind simbolurile cunoscute din matematica. In aceste conditii nu e necesar ca utilizatorul sa cunoasca comenzile sistemului insuficient sa selecteze simbolurile adecvate dintr-o "paleta" de simboluri pentru a construi formulele.
5. Caracterul deschis si exibil. Majoritatea sistemelor actuale permit completarea functionalitatii sistemului prin adaugarea de functii noi (descrise în limbajul specific sistemului).
6. Interfata cu alte sisteme. Exista posibilitatea de a prelua/transmite date de la/catre alte aplicatii. Functiile unora dintre sisteme pot apelate prin intermediul unui protocol de interfata (de exemplu, MathLink si J/Link din Mathematica) din programe scrise în limbaje de programare de uz general (de exemplu, C respectiv Java).
7. Elaborarea de documente. Sistemele recente contin si facilitati de editare de texte stiintifice astfel încât pot fi elaborate documente care contin atâtea texte cât si rezultate ale unor prelucrari efectuate în cadrul sistemului.
8.Completitudine. Asista utilizatorul în analiza si rezolvarea problemelor precum si în prezentarea rezultatelor

Sistemele de software matematic se pot aplica în domenii diferite, cum ar fi: **Matematica** (pentru verificarea unei teorii, enuntarea de noi conjecturi, elaborarea unor demonstratii care implica doar calcule de rutina sau rationamente standard, vizualizarea grafica a unor obiecte geometrice etc.); **Fizica** (pentru prelucrarea datelor experimentale si simularea soft a unor fenomene. **Chimie** (pentru simularea soft a structurilor moleculare si prelucrarea relatiilor ce descriu reactiile chimice); **Statistica** (pentru vizualizarea grafica si analiza datelor, efectuarea de inferente statistice pornind de la date obtinute din sondaje, analiza corelatiei dintre date etc.); **Inginerie** (pentru prelucrarea semnalelor si modelarea sistemelor, proiectare asistata de calculator); Biologie si medicina (pentru simularea fenomenelor biomecanice, prelucrarea semnalelor si imaginilor din medicina etc.); **Economie si finante** (pentru modelare finaniciara, planificarea si analiza economica, efectuarede predictii .

La ora actuala exista o multitudine de pachete soft destinate efectuarii de prelucrari numerice, simbolice sau grafice. Pentru a facilita identificarea si accesarea pachetului adecvat unei anumite probleme au fost constituite colectii de date care contin informatii privind diferite pachete. O astfel de colectie este accesibila la [http://gams.nist.gov].

Unele dintre pachetele de software matematic sunt orientate spre sarcini precise si oarecum limitate la un anumit domeniu (cum sunt, de exemplu, pachetele de reprezentari grafice (DataPlot, GnuPlot), programele de prelucrare a datelor experimentale (TableCurve, Origin, DataFit, GnuFit etc), pachetele destinate prelucrarilor statistice (Statistica, SPSS, SPlus), sistemele de rezolvare a problemelor de optimizare (MinOpt), sistemele de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare si cu derivate partiale etc.), iar altele au caracter mai general oferind facilitati care permit utilizarea lor în diverse domenii. Dintre sistemele ce fac parte din ultima categorie, cele mai frecvent utilizate sunt enumerate încontinuare.

Mathematica (versiune curent_a: Mathematica 6.0)[www.wolfram.com] Este un sistem integrat care permite efectuarea de calcule simbolice si numerice precum si vizualizarea rezultatelor.

Exista atat variante pentru industrie cat si pentru educatie. Maple (versiune curent_a: Maple 11) [www.maplesoft.com] Este un sistem integrat (similar cu Mathematica) care permite efectuarea de calcule simbolice si numerice, vizualizarea rezultatelor si toate prelucrile necesare simularii si modelarii specifice diferitelor domenii (stiinta, inginerie, finante etc.). La fel ca si Mathematica poseda o puternica componenta de calcul simbolic. Ofera facilitati de interfatare cu alte sisteme. De exemplu permite generare de cod C, Fortran, Visual Basic, Java precum si asigura conexiune usoara cu Excel si Matlab.Matlab (versiune curenta: Matlab R2007b) [www.mathworks.com] Este tot un sistem integrat care exceleaza prin facilitatile oferite pentru modelare si simulare precum si pentru colectia foarte mare de "toolbox-uri" dedicate unor domenii stiintifice si ingineresti variate. Facilitatile de calcul simbolic (destul de limitate in primele versiuni) au fost extinse prin interfatarea cu Maple. Scilab [http://www.scilab.org/] este o varianta gratuita a lui Matlab caracterizata prin facilitati de baza si interfata similara cu cea din Matlab fara a pune însa la dispozitia utilizatorilor instrumente similare "toolbox-urilor" din Matlab. MathCad (versiune curenta: MathCAD 14.0) [www.mathsoft.com] Este tot un sistem integrat orientat în particular catre facilitarea calculelor numerice si vizualizarea grafica a rezultatelor. Desi poseda facilitati de calcul simbolic, acestea nu le egaleaza pe cele oferite de Mathematica sau Maple.

Mathematica a fost conceputa de catre fizicianul Stephen Wolfram, prima versiune aparând în 1988. Urmatoarele versiuni (pana la cea actuala, 6.0) au fost elaborate în cadrul firmei Wolfram Research Inc (http://www.wolfram.com). De-a lungul evolutiei sale nucleul a fost îmbogatit cu noi algoritmi eficienti extinzandu-se sfera de probleme care pot fi rezolvate. Pe de alta parte a evoluat si interfata cu utilizatorul de la simpla comunicare în mod text prin introducere secventiala de comenzi pana la interfale grafice ale versiunilor recente si cele ale produselor derivate: CalculationCenter, WebMathematica, gridMathematica.

CalculationCenter este un SSM construit pornind de la nucleul din Mathematica si completat cu o interfata grafica bazata pe selectia tipului de prelucrare dintr-un set de palete cu simboluri, operatori, comenzi etc. Nu e necesar ca utilizatorul sa fie familiar cu comenzile din Mathematica ci este suficient sa stie ce problema are de rezolvat si sa selecteze simbolurile corespunzatoare. A fost conceput ca un "asistent" pentru nespecialistii în matematica care au de rezolvat probleme ce necesita utilizarea unor metode matematice.

WebMathematica este un produs recent care ofera posibilitatea de a efectua calcule interactive si de a vizualiza rezultatele (inclusiv in maniera grafica) prin intermediul unui browser Web.

Prin WebMathematica (conceputa folosind tehnologia Java servlet) se pot proiecta site-uri dedicate rezolvarii problemelor specice unui domeniu. Se beneficiaza de întreaga putere de calcul algoritmic a Mathematicii iar utilizatorul nu trebuie decat sa foloseasca un browser nefiind necesara cunoasterea comenzilor din Mathematica.

Un exemplu de site bazat pe WebMathematica este Integrator (http://integrals.wolfram.com) care permite calculul integralelor.

GridMathematica este conceput ca un sistem care permite efectuarea de prelucrari distribuite exploat si resursele oferite de clusterele de calculatoare.

In[]:=, respectiv Out[]= sunt afisate de catre sistem, utilizatorul introducand doar comanda care apare dupa In[]:=. Rezultatul care apare dupa Out[]= este cel asat de sistem. In realitate intre parantezele drepte de la In[] si Out[] apar valori numerice care identifica comanda, respectiv raspunsul.

De la operaţii simple de calcul până la programare pe scară largă şi pregătirea interactivă a documentelor, Mathematica este instrumentul pe care îl alegem la frontierele cercetării ştiinţifice, în analiză, inginerie şi modelare, în educaţia tehnică începând cu liceul şi până la doctorat, dar şi oriunde şi oricând vom folosi metode cantitative.

Mathematica integrează calculul numeric cu un motor de calcul simbolic, sistem grafic, limbaj de programare, sistem de documentaţie şi are posibilităţi de conectare avansată cu alte aplicaţii. Această gamă de capabilităţi , cele mai multe fiind lider mondial in zona lor de acţiune fac Mathematica singurul instrument capabil să rezolve toate problemele pentru noi sau pentru necesităţile tehnice ale altor organizaţii.

Mathematica este un sistem software interactive, a fost conceputa de fizicianul Stephen Wolfram, prima versiune aparand in anul 1988 si a fost imbogatita sistematic cu noi algoritmi eficenti extinzandu-se sfera de probleme care pot fi rezolvate. De obicei Mathematica este folosită direct din interfaţa sa notebook, aşa cum e pregatită de la simpla instalare. Totuşi, din ce în ce mai frecvent este folosită prin interfeţe alternative, cum ar fi un browser web sau prin alte tipuri de sisteme, funcţionând ca motor de calcul.Unele dintre aceste moduri de utilizare presupun cunoaşterea extensivă a Mathematica, în timp ce altele nu. Mathematica nu este folosită pentru sarcini uşoare decât rareori, este prin excelenţă instrumentul ales pentru teme din cercetarea ştiinţifică avansată, operând multe dintre cele mai complexe calcule din lume. Această capacitate de a opera la toate nivelele se datorează consistenţei complete a proiectului Mathematica -- aşa cum a fost dezvoltată şi ajută ca utilizarea ei în moduri mai avansate să evolueze natural. La nivel superficial, Mathematica este un calculator uluitor de puternic, dar pe atât de uşor de folosit. Cel mai complet set de funcţii matematice, ştiinţifice, inginereşti şi financiare din lume este gata de folosire, adesea doar dintr-un click de mouse sau o comandă. Cu toate acestea, funcţiile Mathematica lucrează pentru orice mărime sau precizie numerică, dar şi calculează simbolic, sunt reprezentate grafic cu uşurinţă, schimbă automat algoritmii pentru a găsi cel mai bun răspuns şi chiar verifică şi ajustează precizia propriilor calcule. Această sofisticare înseamnă rezultate de încredere de fiecare dată, chiar şi pentru utilizatorii mai puţin experimentaţi cu metodele unui anumit tip de calcul.

In timp ce lucrează prin reprezentarea calculelor, documentul de tip notebook ţine un raport complet: intrări, ieşiri şi grafice într-o formă interactivă şi simultan formatată ca o publicaţie.

Adăugând text, titluri, formule dintr-o carte sau chiar elemente de interfaţă, toate aflate la îndemână, vei produce imediat din materialul original o prezentare slide show sau pentru web, în format XML sau bună de tipar. De fapt, cu tehnologia documentului de tip notebook, se produce cu uşurinţă o interfaţă complet adaptată utilizatorului, cu care cel care primeşte documentul poate să interacţioneze cu conţinutul acestuia. Notebook-ul este un document tehnic combinat cu mediu de creaţie dotat complet şi complet integrat din punct de vedere tehnic.

Programarea e simplă, rezultatele puternice. Mathematica este şi un mediu de dezvoltare robust. Pachetele Mathematica pot fi depanate, încapsulate sau înglobate într-o interfaţă utilizator, totul din cadrul sistemului Mathematica. Alternativ, Java, C sau conexiuni la sisteme proprietar pot folosi puterea Mathematica în spatele scenei.

Programarea simbolică este tehnologia care furnizează pentru Mathematica această incomparabilă gamă de posibilităţi. Ea permite ca fiecare tip de obiect şi fiecare operaţie, fie date, funcţii, grafice, programe sau chiar documente complete, să fie reprezentate într-un singur mod uniform, ca expresii simbolice. Această unificare are multe beneficii practice, de la uşurinţa de a învăţa la extinderea domeniului de aplicaţie al fiecărei funcţii. Astfel, puterea nativă a calculului algoritmic al Mathematica este amplificată şi utilitatea sa extinsă. Pasul de la calculul imediat la rezultate obţinute prin programare se face prin evoluţie. In Mathematica o singură linie scrisă produce un program coerent -metodologia, sintaxa şi documentele folosite pentru intrări şi ieşiri păstrându-se ca atare pentru calcul imediat.

Cu usurinta se pot calcula integrale definite, primitive ale functiilor, se pot vedea reprezentari grafice, diferite valori ale functiilor.

In[]:=

Out[]:=

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\, d\, x =$$

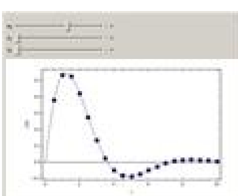
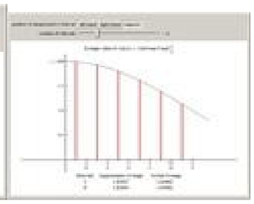
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\; x + 2\,\sin^{-1}\!\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

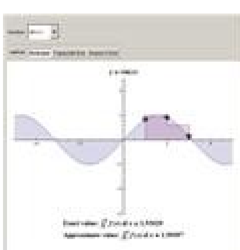
$$\int \sin^2(x)\, d\, x =$$

$$\frac{1}{2}\,(x - \sin(x)\cos(x))$$

$$\int x^2 \sin(x)\, d\, x =$$

$$2\, x \sin(x) - \left(x^2 - 2\right)\cos(x)$$



http://demonstrations.wolfram.com/NumericalInversionOfTheLaplaceTransformTheZakianMethod/
http://demonstrations.wolfram.com/AverageValueOfAFunction/
http://demonstrations.wolfram.com/NumericalIntegrationUsingRectanglesTheTrapezoidalRuleOrSimps

Concluzii: **Utilizarea sistemelor de software matematic este motivata de obtinerea rezolvarilor foarte rapide a unor aplicatii de mari dimensiuni , sau probleme ce necesita calcule laborioase. Aceste sisteme pot fi utilizate si in scop didactic, la diferite nivele, pentru predarea de discipline stiintifice (matematica, fizica, chimie, economie), inclusiv in cadrul invatamantului la distanta, sau pentru alte testari on-line.**

Bibliografie: Wolfram Mathematica integrals.wolfram.com
(http://www.wolfram.com)

Metode noi de învaţare

Prof. Dragomir Liliana

În zilele noastre este din ce în ce mai greu să-i determinăm , să-i motivăm pe elevi să înveţe. Motiv pentru care trebuie să folosim metode cât mai provocatoare, mai diversificate, adaptate la nivelul de pregătire al elevului.
Una din metodele moderne pe care am folosit-o este:

Turul galeriei (metoda interactivă de recapitulare şi consolidare a cunostinţelor). Aceasta metodă presupune parcurgerea unor paşi:

1. braistorming individual
2. interviu de grup
3. producerea planşelor
4. susţinerea produselor de către un raportor
5. afişarea produselor
6. efectuarea turului galeriei
7. dezbaterea

Elevii lucrează în grupe de câte 3, 4 . Se propune un subiect pentru care elevii generează cât mai multe idei.
Expunerea subiectului trebuie să cuprindă toate datele necesare şi toate criteriile implicate.

Fiecare grup işi alege sau primeşte o anumită tema din subiectul propus, dar şi toate grupele pot avea aceeaşi temă.

Un secretar ales de elevii grupei notează rezultatele brainstormingului pe o coală de hârtie, folosind markere de diferite culori. Şeful grupei susţine produsul realizat în faţa celorlalte grupe. Posterele sunt apoi expuse în diferite locuri din clasă , accesibile elevilor. După expunerea produselor obţinute , fiecare grup examinează cu atenţie produsele celorlalte grupe , grupele se rotesc de la un produs la altul , se discută şi eventual , se notează comentariile, neclarităţile întrebările care vor fi adresate celorlalte grupe.

După turul galeriei, fiecare grup răspunde la întrebările celorlalţi şi clarifică unele aspecte solicitate de colegi, apoi işi reexaminează propriile produse prin comparaţie cu celelalte.

În acest fel prin feed-back-ul oferit de colegi, are loc învăţarea şi consolidarea unor cunoştiinţe.

Atmosfera din clasă trebuie să le permită elevilor să gândească critic. Astfel ajung să înţeleagă că atunci cậnd investesc suficientă energie în învaţare şi se implică în mod activ , procesul devine agreabil şi dă naştere unui sentiment de implinire.

Locul şi rolul evaluării în procesul instructiv-educativ

prof. Angela OSAIN
Grup Şcolar Industrial Transporturi Auto
Timişoara

Evaluarea constituie o activitate de colectare, organizare şi interpretare a datelor obţinute prin intermediul instrumentelor de evaluare în scopul emiterii unei judecăţi de valoare asupra rezultatelor măsurării, adoptării unei decizii educaţionale fundamentate pe concluziile desprinse din interpretarea şi aprecierea rezultatelor.

Funcţiile evaluării

În cadrul procesului de învăţământ evaluarea îşi exercită:

Funcţie diagnostică realizată prin teste de cunoştinţe de tip diagnostic;

Funcţia prognostică realizată prin teste de aptitudini, teste pedagogice de tip criterial sau de tip normativ;

Funcţia de selecţie care intervine atunci când se doreşte clasificarea şi admiterea candidaţilor în urma examenelor şcolare.

Experienţa pedagogică a permis conturarea a trei forme de evaluare, după modul de integrare a lor în desfăşurarea procesului didactic:

evaluarea iniţială
evaluarea continuă (formativă)
evaluarea cumulativă (sumativă)

Metode şi tehnici de evaluare

Principala problemă a învăţământului actual – *supraîncărcarea* - nu ţine numai de conţinutul programei, ci şi de tradiţiile ultimilor ani şi de presiuni exterioare exercitate asupra sistemului(presiunile ciclului şcolar următor, olimpiadele, presiunile părinţilor, stângăcia muncii diferenţiate).

Poate fi utilizată drept *probă de evaluare* orice formă de verificare – orală, scrisă sau practică – tradiţională sau alternativă, dacă sunt îndeplinite condiţiile:sunt stabilite capacităţile şi conţinuturile care se evaluează; obiectivele de referinţă; tipurile de itemi adecvaţi descriptorii de performanţă; modalitatea în care se vor face cunoscute părinţilor şi elevilor rezultatele obţinute

Instrumente de evaluare pot fi tradiţionale sau alternative. Dintre *instrumentele alternative de evaluare:*

observarea sistematică a elevilor – poate fi făcută pentru a evalua performanţele elevilor, dar în special comportamentele afectiv – atitudinale

investigaţia – reprezintă o situaţie complicată care nu are o rezolvare simplă

proiectul **–** presupune o activitate mai amplă decât investigaţia care începe în clasă prin definirea şi înţelegerea sarcinii, se continuă acasă pe o anumită perioadă şi se încheie tot în clasă prin prezentarea în faţa colegilor a rezultatelor obţinute sau a produsului realizat.

portofoliul – reprezintă o colecţie de informaţii despre progresul şcolar al unui elev, obţinut printr-o varietate de metode şi tehnici de evaluare.

autoevaluarea – este realizată prin întrebări pe care şi-le pun elevii înşişi în condiţii necesare pentru formarea deprinderilor evaluative

Problematizarea (metoda rezolvării de probleme)

Prof. Dragomir Liliana

Predarea presupune prezentarea unor sarcini de cunoaştere, prin rezolvarea cărora elevii dobândesc, în mod activ, cunoştinţele, formându-şi inclusiv o serie de deprinderi intelectuale. Profesorul ar trebui să se bazeze mai mult pe acţiunea independentă a şcolarilor, care este necesar să îşi asume deliberat un comportament de învăţare centrat pe rezolvarea de probleme şi descoperirea de noi cunoştinţe. Desigur că întregul proces de învăţare de acest tip este asistat şi dirijat de profesor, care îndrumă eforturile cognitive ale elevilor.

Problematizarea este considerată, în didactica modernă, una dintre cele mai valoroase metode deoarece orientează gândirea şcolarilor spre rezolvarea independentă de probleme. Utilizând metoda în discuţie, profesorul pune pe elev în situaţia de a căuta un răspuns pertinent, o soluţie pentru problema cu care se confruntă. Punctul de pornire îl constituie crearea situaţiei-problemă, care desemnează o situaţie contradictorie, conflictuală între experienţa de cunoaştere anterioară şi elementul de noutate cu care se confruntă şcolarul.

Situaţia-problemă este necesar să prezinte următoarele caracteristici:

- să reprezinte o dificultate cognitivă pentru şcolar, rezolvarea acesteia necesitând un efort real de gândire;
- să trezească interesul şcolarului, să-l surprindă, să-l uimească, provocându-l să acţioneze;
- să orienteze activitatea şcolarului în direcţia rezolvării, aflării soluţiei de rezolvare şi, pe cale de consecinţă, avansării în cunoaştere;
- rezolvarea nu este posibilă fără activarea cunoştinţelor şi experienţelor dobândite anterior.

Tensiunea (conflictul) se crează între experienţa anterioară (ceea ce şcolarul deja cunoaşte) şi elementul de noutate cu care se confruntă. Această tensiune îl va determina să acţioneze, să caute (investigheze) şi să intuiască soluţia de rezolvare a acestei tensiuni.

Avansarea situaţiei-problemă şi activitatea exploratorie a elevului pentru a descoperi soluţia presupune patru momente fundamentale:

punerea problemei şi perceperea ei de către elevi (inclusiv primii indici orientativi pentru rezolvare). Acum, profesorul descrie situaţia-problemă, expune faptele, explică anumite relaţii cauzale, recepţionează primele solicitări ale elevilor şi dă informaţii suplimentare.

Practic, profesorul dezvăluie doar germenii adevărurilor ce vor fi apoi descoperite de elevi prin efort propriu.

studierea aprofundată şi restructurarea datelor problemei (în acest moment, problematizarea se apropie de cercetarea fundamentală). În această etapă, elevul lucrează independent: reactualizează cunoştinţele, se documentează în domeniu, compară informaţiile, se opreşte la o sumă de informaţii pe care le consideră necesare şi relevante.

căutarea soluţiilor posibile la problema pusă:

- analizează atent şi cu discernământ materialul faptic
- procedează la o sinteză, pentru a recupera esenţialul, face conexiuni logice, analizând condiţiile de producere / manifestare a fenomenului sau situaţiei, formulează ipoteze privind soluţionarea problemei şi le verifică pe fiecare în parte. Apoi trece în ultima fază. obţinerea rezultatului final şi evaluarea acestuia. La acest moment, elevul compară rezultatele obţinute prin rezolvarea fiecărei ipoteze. În final, elevul decide/alege soluţia optimă, care se confruntă cu ideile prezentate în manual.

Concluzii: Metoda este foarte bună deoarece are un pronunţat caracter formativ:

a) antrenează întreaga personalitate a elevului (intelectul, calităţile voliţionale, afectivitatea), captând atenţia şi mobilizând la efort;
b) cultivă autonomia acţională;
c) formează un stil activ de muncă;
d) asigură susţinerea motivaţiei învăţării;
e) dă încrederea în sine.

Problematizarea cere respectarea unor condiţii:

1. elevii să aibă cunoştinţe anterioare legate de problema dată;
2. elevii să fie realmente interesaţi să rezolve;
3. dificultăţile să fie judicios dozate pentru a nu bloca elevul;
4. momentul plasării problemei să fie potrivit.

Strategia problematizării nu are, însă, aplicabilitate universală. Există conţinuturi care nu se pretează la o astfel de abordare, după cum există şi situaţii când elevii nu dispun de cunoştinţele şi abilităţile necesare.

Se poate aplica în combinaţie cu dezbaterea, studiul de caz, lectura şi analiza de text, învăţarea prin descoperire etc.

EFICIENŢA STEP BY STEP

prof. Constantin OSAIN
Grup Şcolar Industrial Transporturi Auto
Timişoara

Step by Step este **o metodă alternativă de educaţie** a copiilor de la naştere până în adolescenţa bazată pe datele psihologiei ştiinţifice a dezvoltării copilului. Metoda s-a consolidat şi verificat în peste 30 de ani de aplicare şi funcţionează în peste 26 de ţări. Elaborarea metodei şi licenţa ei aparţine Children Resource International din Washington – SUA.

In Romania programul Step by Step a debutat în 1994, sub numele de Head Start, la iniţiativa Fundaţiei Soros pentru o Societate Deschisă. Din 1995 programul a luat numele de Step by Step ("Pas cu Pas" - în limba engleza), nume de licenţă pentru toate ţările din Europa de est în care se aplică.

În acest sistem copilul învaţă prin reproducerea modelului dat. Educaţia este generalizatoare, egalizatoare, după un model, care nu este intotdeauna înţeles de către copil cu toate că este probat şi acceptat de către adulţi. Performanţa rezultată se evaluează, prin notare. Astfel nota prin judecata de valoare asociată devine "vina" sau "merit" ale copilului.

Copilul învaţă prin descoperire în interacţiunea sa cu mediul. Interacţiunea cu mediul şi motivaţia explorarii este cultivată de pedagog. Metodele şi mijloacele de explorare şi cunoaştere ale copilului sunt individuale, adesea neaşteptate, originale. Educaţia este individualizată, copilul merge spre cunoaşterea lumii inconjuratoare şi identificarea comportamentelor utile, pe căi personale. Performanţa într-un domeniu de dezvoltare este în acest caz, de comparat doar cu celelalte aspecte ale dezvoltarii copilului şi cu propria performanţă sau abilitate anterioară, nu cu un standard extern. Comparaţia cu el însuşi în performanţele anterioare o face atât copilul cât şi pedagogul, aceasta fiind una din motivaţiile descoperirii şi progresului individual. In plus copilul descoperă efectele şi mijloacele colaborării şi negocierii cu semenii în locul unei competiţii pe criterii standard impuse de adulţi.

Puteri ale matricilor

Prof. Liliana Dragomir
Prof. Simona- Ecaterina Bejan

<u>Definitie</u> : Fie M=$\{1,2,\ldots,m\}$,N=$\{1,2,\ldots,n\}$ multimea primelor m respectiv n, numere naturale nenule.Se numeste matrice de tip (m,n) functia A:MxN→C definita prin tabloul:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notate prescurtat A=(a_{ij}) unde a_{ij} C(multimea numerelor complexe).Multimea tuturor matricelor de tip (m,n)se noteaza cu M_{mn}(C) unde m reprezinta numarul de linii si n numarul de coloane .

Cazuri particulare

1) O matrice de tipul (deci cu o linie si *n* coloane) se numeste matrice linie si are forma

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

2) O matrice de tipul (cu *m* linii si o coloana) se numeste matrice coloana si are forma

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

3) O matrice de tip se numeste nula (zero) daca toate elementele ei sunt zero. Se noteaza cu *O*

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Daca numarul de linii este egal cu numarul de coloane, atunci matricea se numeste patratica.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sistemul de elemente $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ reprezinta diagonala principala a matricii *A*, iar suma acestor elemente se numeste urma matricii *A* notata *Tr*(*A*) $=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Sistemul de elemente $\begin{pmatrix} a_{1n} & a_{2\,n-1} & \ldots & a_{n1} \end{pmatrix}$ reprezinta diagonala secundara a matricii *A*.

Multimea acestor matrici se noteaza $M_n(C)$. Printre aceste matrici una este foarte importanta aceasta fiind

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

si se numeste matricea unitate (pe diagonala principala are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt egale cu 0).

<u>Matrici egale:</u> Fie A M_{mn}(C), A=(aij) si B M_{mn}(C), B=(bij) Atunci A=B ⇔ a_{ij}= b_{ij} oricare ar fi i= ,

j= .

<u>Adunarea matricelor:</u> A+B=C unde C=(c_{ij}) unde c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} oricare ar fi i= ,j= Se numeste suma dintre matricele A si B.

<u>Proprietati:</u> 1)Adunarea este asociativa :(A+B)+C=A+(B+C) A,B,C M_{mn}(C)

2)Adunarea este comutativa: A+B=B+A , A,B M_{mn}(C)

3)Matricea cu toate elementele 0(zero),notata cu O ,O M_{mn}(C),este elementul neutru pentru adunare.

4)Orice matrice A M_{mn}(C) are un opus notat –A M_{mn}(C) astfel încat A+(-A)=(-A)+A=0.

<u>Observatie:</u> Se aduna numai matrici de acelasi tip.

<u>Inmultirea matricilor</u> :

Se înmultesc doua matrici AMmn(C) si BMnp(C) numai daca numarul de coloane ale lui A este egal cu numarul de linii ale lui B si AB=C unde C $M_{mp}(C)$ si

daca $A=(a_{ij})$,$B=(b_{jk})$ atunci $C=(c_{ik})$.

Pe scurt "se înmultesc liniile cu coloanele ",astfel

$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

Proprietati 1)Inmultirea matricilor este asociativa:
(AB)C=A(BC) daca A $M_{mn}(C)$,B $M_{np}(C)$,C $M_{pq}(C)$
2)Inmultirea matricilor nu este comutativa:
3)Inmultirea este distributiva fata de adunare :
Daca A $M_{mn}(C)$;B,C $M_{np}(C)$ atunci A(B+C)=AB+AC
Daca A,B $M_{mn}(C)$ si C $M_{np}(C)$ atunci
(A+B)C=AC+BC
4)In multimea $M_n(C)$ matricilor patratice exista matricea

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

patratica de ordinul n ce reprezinta elementul neutru fata de înmultire,adica $AI_n=I_nA=A$ A $M_n(C)$.

Matricea transpusa notata cu A^t –se schimba în matricea A liniile în coloane. *Puterile unei matrici*

Definitie. Fie *A* $M_n(C)$. Atunci ,
, , …, , $(\forall)$ *n*
. (Convenim).

TEOREMA Cayley – Hamilton. Orice matrice *A* $M_n(C)$ îsi verifica polinomul caracteristic $\det(A-\lambda I)=0$.

Pentru *n* = 2.

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}.$$

$$\det A-\lambda I=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(a-\lambda)(d-$$

$$\Rightarrow \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

polinom caracteristic

Generalizat.

$$A^n-(\mathrm{Tr}A)\cdot A^{n-1}+(\det A)\cdot I_n=0$$

Matlab (Matrix Laboratory) este un pachet de programe, produs de firma The MathWorks, dedicat calculului numeric si reprezentarilor grafice în stiinta si inginerie. Elementul de baza cu care opereaza Matlab este matricea. O matrice poate fi definita in Matlab fie element cu element, ca o lista, fie în cazul unor matrice de tip special, prin instructiuni specific. Principalele operatii cu matrice sunt: adunarea si scaderea, înmultirea, ridicarea la putere, împartirea la dreapta, respectiv la stânga, transpunerea, complementul algebric a elementului A(i,j) este minorul înmultit cu (-1)i+j. Minorul de ordinul n, mij, este determinantul de ordinul n-1 obsinut prin eliminarea liniei i si a coloanei j.

Factorizarea unei matrice. Prin factorizarea LU se întelege ca o matrice patratica de ordinul n, A se descompune în produsul a doua matrice patratice, de acelasi ordin cu A,L si U, unde L este o matrice inferior triunghiulara, iar U superior triunghiulara. Exemple de factorizari LU: factorizare Doolittle, factorizarea Crout, factorizarea Cholesky.
Prin factorizarea Doolittle matricea A se descompune în produsul a doua matrici dupa cum urmeaza:
A=L*U
unde L este o matrice inferior triunghiulara care are pe diagonala principala 1, iar U este o matrice superior triunghiulara.
Prin factorizarea Crout matricea A se descompune în produsul a doua matrice dupa cum urmeaza:
A=L*U
unde L este o matrice inferior triunghiulara, iar U este o matrice superior triunghiulara care are pe diagonala principala 1.
Prin factorizarea Cholesky matricea A se descompune în produsul a doua matrice dupa cum urmeaza:
A=L*LT
unde L este o matrice inferior triunghiulara, iar LT este transpusa lui L, adica o matrice superior triunghiulara.
Pentru ca A sa poata fi descompusa astfel, se impune conditia ca A sa fie simetrica si pozitiv-definita.
O matrice A patratica de ordinul n este simetrica daca AT=A.
O matrice A patratica de ordinul n este pozitiv-definita daca xT*A*x>0 oricare ar fi vectorul x de dimensiune n.
Prin factorizarea QR se întelege ca o matrice A se descompune în produsul a doua matrice Q si R, unde Q este o matrice ortonormala, iar R este o matrice superior triunghiulara.
A=Q*R
O matrice A este ortonormata (ortogonala) daca AT=A-1.

Exercitii rezolvate din manualele de liceu :
1)Fie matricea
A= . .Sa se calculeze $(I+A)^n$,n N* unde I= .
REZOLVARE: Se aplica binomul lui Newton.

$(I+A)^n=C\quad I^n+C\quad I^{n-1}A+C\quad I^{n-2}A^2+....+C\quad A^n$

Dar $A^2 = A\,A=..=$.

$A^3=A^2\,A===O$

Deci $A^n=O$ n 3 n N si $(I+A)^n=.+n++..+O$

In final $(I+A)^n=$

Observatie:In general daca A=,a,b,c R atunci A= + sau A=I+B unde B=.Se constata ca $B^3 =O$ si deci $B^n=O$ n

3 n N si atunci $A^n=(I+B)^n$.

2) Fie matricea A= .Sa se calculeze B= unde n N*.

REZOLVARE: A=I+B sau =+B deci B= => $B^2=$

$B^3=O$ deci $B^n=0$ n 3 n N si $A^n=(I+B)^n= = =1+n+ +...+1\cdot O$

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n & 4n^2-n\\ 0 & 1 & 4n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Cum $\sum_{k=1}^{n}1$ =n; $\sum_{k=1}^{n}k = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .AvemB= $\sum_{k=1}^{n}A^k$ =

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & 2k & 4k^2-k\\ 0 & 1 & 4k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n} & 2\sum_{k=1}^{n}k & 4\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\\ 0 & \sum_{k=1}^{n}1 & 4\sum_{k=1}^{n}k\\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{n}1\end{pmatrix}$$

Observatie: A $M_n(C)$ se poate calcula A^n,n N* si prin alta metode,

ca: 1)prin inductie matematica

Exemplu: Fie A= $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in$ $M_2(Z)$ pentru a calcula A^n observam ca $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,$A^3=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ cea ce ne face sa presupunem ca $A^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, .

Demonstram aceasta propozitie folosind metoda inductiei matematice:

1. etapa de verificare n=1 => A= $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2. presupunem $A^k=\begin{pmatrix}1 & ka\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ si sa demonstram ca $A^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & (k+1)a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

Dar $A^{k+1}=A^k\,A$

$$\begin{pmatrix}1 & ka\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & (k+1)a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

deci $A^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, .

2)Se poate calcula A^n, n N *,si folosind sirurile recurente:

Exemplu: Fie matricea A= $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.Sa se calculeze A^n, n N.

REZOLVARE: Notam $A^n=\begin{pmatrix}1 & a_n & b_n\\ 0 & 1 & a_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.Substituind pe n cu n+1 obtinem: $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & a_{n+1} & b_{n+1}\\ 0 & 1 & a_{n+1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Pe de alta parte calculand $A^{n+1}=A^n\,A$ avem

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & a_n & b_n\\ 0 & 1 & a_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1+a_n & 1+a_n+b_n\\ 0 & 1 & 1+a_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ deci se obtin relatiile

$\{a_{n+1}=a_n+1 \quad cu\ a_1=1$

$\{b_{n+1}=b_n+a_n+1 \quad cu\ b_1=1$ =>a_n=n si b_n= $\dfrac{n(n+1)}{2}$ si deci $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,n

3) Fie H= $\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in R \right\}$

a) Sa se arate ca (H,) este grup abelian(operatia " ",este operatia de înmultire a matricilor).

b) Sa se arate ca (H,)este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale (R,+).

REZOLVARE: 1.Fie A_x H si A_y H sa aratam ca operatia este bine definita ,sau ca (H,) stabila:

dar A_x A_y=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ -y & 1 & -\frac{1}{2}y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(x+y) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci A_x $A_y=A_{x+y}$ H pentru ca x R,y R si x+y R.

2.Asociativitatea : (A_x A_y)A_z=A_x(A_y A_z; A_x,A_y,A_z H evident pentru ca $A_{(x+y)+z}=A_{x+(y+z)}$

3.Comutativitatea A_x A_y=A_y A_x , A_x,A_y H evident pentru ca $A_{x+y}=A_{y+x}$

4.Elementul neutru

$A_eA_x=A_xA_e=A$ dar A_x $A_e=A_x$ ⇔ $A_{x+e}=A_x$⇔x+e=x =>e=0

deci $A_e=A_0$= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.Simetricul: A_x H, A^{x^1} H astfel [ncat $A_x A^{x^1}$ =

$A^{x^1} A_x=A_0$ dar

$A_x A^{x^1}=A_0$ =>$A^{x+x^1}=A_0$ =>$x+x^1=0$ =>$x^1=-x$ => A^{x^1} =
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ -x & 1 & -\frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ H

Deci (H,) este grup abelian.

c) Se considera f:R→H, x--->f(x)=

1)Se verifica f bijectiva

2) iar relatia f(x)f(y)=f(x+y) evident pentru ca f(x)=A_x, f(y)=A_y ,$A_xA_y=A_{x+y}$ deci f(x)f(y)=$A_xA_y=A_{x+y}$=f(x+y).

Exercitii propuse:

1.Fie A=,a,b,c,dC.

a) Aratati ca A-(a+d)A+(ad-bc)I=O(Cayley-Hamilton).

b) Calculati A,unde A=.

2.Sa se determine parametri astfel [ncat matricea A sa verifice relatia A^2- A+ $I_2=O_2$ unde O_2= si I_2= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Fie A=,aR. Sa se calcule.

4. Se considera multimea de matrici G $\left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} / a,b \in Z \right\}$ .Sa se demonstreze ca G este parte stabila a lui $M_2(Z)$ în raport cu adunarea ,respectiv înmultirea matricelor. Sa se arate ca (G,+,) formeza o structura de inel comutativ fara divizori a lui zero.

Bibliografie:

C.Năstăsescu, C. Niţă, I. Stănescu:Elemente de algebră superioară.E.D.P., Bucuresti 1982.

Mircea Ganga: Elemente de algebră liniară, Ed. Mathpress2000.